

УДК 519.217

Э.А.ДАНИЕЛЯН, Х.З.ХАЧИЯН

## ТЕНДЕНЦИИ В ИЗУЧЕНИИ МОДЕЛИ $M_r|G_r|1|\infty$ ТЕОРИИ ОЧЕРЕДЕЙ

Работа представляет краткий обзор одной области теории очередей – модели  $M_r|G_r|1|\infty$ . Изложены методы анализа характеристик модели при классических дисциплинах абсолютных, относительных и чередующихся приоритетов. Обоснован и осуществлен переход к анализу параметрических дисциплин и далее – к классу консервативных дисциплин. Особое внимание обращено на условия существования стационарных распределений и на законы сохранения. Очерчен круг оптимизационных задач и указаны направления асимптотического анализа (пределных теорем) в условиях различных загрузок. Проведен раздел между инженерной и математической теориями.

**В моделях очередей особое место занимает**

**Модель  $M_r|G_r|1|\infty$ .** В одноканальную систему с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ...,  $r$ -вызовов с параметрами  $a_1, \dots, a_r$  соответственно. Длительности обслуживания независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для  $k$ -вызовов,  $k = \overline{1, r}$ , имеют распределение  $B_k(x)$ ,  $B_k(+0) = 0$ . В момент  $t = 0$  в системе отсутствуют вызовы.

В рамках модели  $M_r|G_r|1|\infty$  исторически раньше возникли дисциплины *абсолютных, относительных и чуть позже чередующихся* приоритетов.

**Относительные приоритеты.** Прерывания обслуживания не допускаются. Из очереди  $i$ -вызов при  $i < j$  попадает на прибор раньше  $j$ -вызова.

**Абсолютные приоритеты.** При  $i < j$  из очереди  $i$ -вызов выбирается на обслуживание раньше  $j$ -вызова. При поступлении в систему  $i$ -вызова обслуживание  $j$ -вызова при  $i < j$  прерывается и начинается обслуживание  $i$ -вызова. Возможны разновидности дисциплины. Например, прерванный вызов при новом поступлении на прибор дообслуживается с прерванного места.

**Чередующиеся приоритеты.** Прерывания обслуживания не допускаются. Обслуживаемый  $i$ -вызов предоставляет преимущество на обслуживание  $i$ -вызовам. Лишь после опустошения очереди  $i$ -вызовов на прибор из общей очереди выбирается вызов с наименьшим номером потока.

К нестационарным характеристикам с *непрерывным* временем модели  $M_r|G_r|1|\infty$  относят длины очередей  $\xi_1(t), \dots, \xi_r(t)$ , виртуальные времена ожидания  $w_1(t), \dots, w_r(t)$  (до *первого* попадания на прибор) и виртуальные времена

пребывания  $u_1(t), \dots, u_r(t)$  (до ухода из системы) 1-вызовов, ..., г-вызовов в момент  $t$ .

Отметим *дискретные* аналоги этих характеристик (характеристики с *дискретным* временем) в моменты начал (или завершений обслуживаний вызовов) или в моменты их поступления в систему. Например, пусть  $t_1 < t_2 < \dots$  – последовательные моменты ухода вызовов из системы. Аналогом  $\xi_k(t)$ ,  $k = \overline{1, r}$ , служит случайная последовательность  $\{\xi_{k,n}\}$ , где  $\xi_{k,n} = \xi_k(t_n)$ ,  $n \geq 1$ .

Модель  $M_r|G_r|1|\infty$  формализует ряд реальных информационно-вычислительных и экономических систем. В них величины  $\xi_k(t)$  и  $\xi_{k,n}$  (существуют и другие) служат аналогами *одной и той же* характеристики. Выбор математиком аналога реальной характеристики продиктован *возможностями* используемого им *метода* анализа.

Пусть  $\eta(t)$  – нестационарная характеристика. Если  $\eta(t) \Rightarrow \eta$  при  $t \rightarrow +\infty$ , где  $\Rightarrow$  – знак слабой сходимости, а  $\eta$  – невырожденная случайная величина, то  $\eta$  называют *стационарной* характеристикой, соответствующей  $\eta(t)$ .

**Первый этап** развития модели  $M_r|G_r|1|\infty$  в математической теории связан с анализом нестационарных и стационарных характеристик при дисциплинах абсолютных, относительных и чередующихся приоритетов. Результаты подытожены в монографиях [1,2]. Публикации исчисляются сотнями. Поэтому мы ссылаемся на монографии или на исследовательские группы выборочно.

Отметим прямые обобщения результатов первого этапа из [1,2].

1. Ограничения на места для ожидания и правила потерь вызовов (группа Башарина [3]).
2. Поломки и восстановления, ориентации прибора (группа Климова [1,4]).

При переходе к общим моделям с вышеупомянутыми дисциплинами отметим модификации методов из [1,2], связанные с аппроксимацией рекуррентных входящих потоков эрланговскими (Ушаков [5]).

**Методы анализа.** Нестационарные характеристики являются случайными процессами с непрерывным или дискретным временем. Поэтому естественно применение методов случайных процессов (точечных, марковских, полумарковских, с независимыми приращениями и т.д.).

В [1,2] длины очередей и времена ожидания введением новых переменных вместо априорной классификации к тому или иному типу случайных процессов дополняют до марковских процессов либо выискивают вложенные в них цепи Маркова.

Задачи подразделяются на части. Первую часть задачи решают вероятностными методами: составляют уравнения для нестационарных характеристик. Целесообразность составления уравнений в терминах интегральных преобразований от распределений характеристик не вызывает сомнений. Они на порядок проще, чем в терминах распределений. Для модели  $M_r|G_r|1|\infty$  удобны преобразования Лапласа–Стильтьеса и производящие функции. Их вероятностная интерпретация [6] расширяет “границы” интуиции. Закономерно использование такой интерпретации в модели  $M_r|G_r|1|\infty$  в *недавно* вышедших монографиях (см., напр., [7]).

В получении удобных уравнений, допускающих аналитическое изучение, проявляются интуиция и опыт вероятностника. Неудачный подход к анализу приоритетных дисциплин – монография [8], основанная на методах полумарковских процессов.

Аппарат интегральных преобразований (см. [9]) решает вторую часть задачи: 1) существование и единственность решений уравнений; 2) допустимость перехода к пределу по времени в уравнениях и получение стационарных решений.

Переход к пределу использует теоремы непрерывности для преобразований Лапласа–Стилтьеса и производящих функций [10] и тауберовы теоремы для интегральных преобразований [11]. (Впрочем, допустимость перехода к пределу обосновывают эргодические теоремы случайных процессов [12]).

В отличие от математической инженерная теория оперирует лишь *стационарными* характеристиками. В модели  $M_r|G_r|1|\infty$  она имеет дело в основном со стационарными средними, но предлагает разнообразие дисциплин и их классов. (См., напр., обзор [13]). Это и есть *первый этап* развития модели  $M_r|G_r|1|\infty$  инженерной теории. Инженеры используют методы расчета средних: метод Кобхема или методы имитационного моделирования на ЭВМ – метод Монте-Карло и т.д. [14,15].

Разнообразие предлагаемых дисциплин – источник *традиционных* постановок задач в математической теории очередей. Примером служит класс консервативных дисциплин. Дисциплина *консервативна*, если работа (время обслуживания) не создается и не исчезает внутри модели, а привносится в модель извне.

**Стационарный режим.** Вопрос существования стационарных распределений модели  $M_r|G_r|1|\infty$  при дисциплинах абсолютных, относительных, чередующихся приоритетов (и их обобщений) решается на основе составленных аналитическими методами уравнений или на основе критериев эргодичности марковских процессов (см., напр., [16]). Обсудим вопрос для класса консер-

вативных дисциплин в модели  $M_r|G_r|1|\infty$ . Обозначим  $\beta_{k1} = \int_0^{\infty} x dB_k(x)$ ,

$$\rho_{k1} = \sum_{i=1}^k a_i \beta_{i1}, \quad k = \overline{1, r}, \quad \rho_1 = \rho_{r1}.$$

**Гипотеза.** В классе консервативных дисциплин модели  $M_r|G_r|1|\infty$  условие  $\rho_1 < 1$  достаточно для существования *стационарных распределений у нестационарных характеристик* (всех возможных!).

Гипотеза подтверждена на примере многих конкретных характеристик и консервативных дисциплин. Математик рассматривает гипотезу применительно к отдельной характеристике. Он говорит об *условиях* существования *стационарного режима*, при которых у данной характеристики существует стационарное распределение. Таким образом, гипотеза выдвигает *универсальное* достаточное условие  $\rho_1 < 1$  существования стационарного режима для всех характеристик.

Из стационарного распределения характеристики вычисляется ее стационарное среднее (математическое ожидание).

**Производная гипотеза.** В классе консервативных дисциплин модели  $M_l|G_l|1|\infty$  условия  $\rho_1 < 1$  и  $\beta_{k2} = \int_0^{\infty} x^2 dB_k(x) < +\infty$ ,  $k = \overline{1, r}$ , достаточны для существования конечных средних стационарных характеристик.

К характеристикам информационно-вычислительных систем относят:

- $\omega_{k1} = Mw_k$  – среднее стационарное время ожидания  $k$ -вызова;
- $u_{k1} = Mu_k$  – среднее стационарное время пребывания  $k$ -вызова в модели.

Здесь  $M$  – знак математического ожидания,  $w_k$  и  $u_k$  – соответствующие случайные величины,  $k = \overline{1, r}$ .

Пусть  $w_0$  – стационарное остаточное время обслуживания находящегося на приборе вызова. В классе консервативных дисциплин модели  $M_l|G_l|1|\infty$  (см. [14], с.133)

$$\omega_{01} = Mw_0 = \rho_2, \quad \text{где} \quad \rho_2 = \rho_{r2}, \quad \rho_{k2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k a_i \beta_{i2}, \quad k = \overline{1, r}. \quad (1)$$

Инженеры достаточным основанием для производной гипотезы считают следующие эвристические соображения. Величина  $a_k$ ,  $k = \overline{1, r}$ , есть среднее число  $k$ -вызовов, поступающих в модель в единицу времени. Их среднее суммарное время обслуживания равно  $a_k \cdot \beta_{k1}$ . Средняя работа, приносимая в модель в единицу времени, равна  $\rho_1$ . При  $\rho_1 < 1$  в каждую единицу времени прибор в среднем свободен  $1 - \rho_1$  единиц времени. С другой стороны, при любой консервативной дисциплине без прерывания обслуживания стационарное среднее  $\omega_{01}$  (см. (1)) составляет часть как  $\omega_{k1}$ ,  $k = \overline{1, r}$ , так и  $u_{k1}$ . Поэтому условия  $\rho_1 < 1$  и  $\beta_{k2} < +\infty$ ,  $k = \overline{1, r}$ , (или  $\rho_1 < 1$ ,  $\rho_2 < +\infty$ ) не допускают неограниченного роста средних времен ожидания и пребывания. Ознакомившись с **законом сохранения работы** [14], с.138, где

$$\sum_{k=1}^r a_k \beta_{k1} \omega_{k1} = \begin{cases} \frac{\rho_1 \omega_{01}}{1 - \rho_1}, & \text{если } \rho_1 < 1, \\ +\infty, & \text{если } \rho_1 \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

постулирует, по сути дела, необходимые и достаточные условия  $\rho_1 < 1$  и  $\rho_2 < +\infty$  существования конечных компонент вектора  $(\omega_{11}, \dots, \omega_{r1})$ , инженер воспринимает производную гипотезу. Отметим, что доказательство (2) в [14] использует другой **закон сохранения** — формулу Литтля

$$\omega_{k1} = a_k \cdot M\xi_k, \quad k = \overline{1, r}, \quad (3)$$

который справедлив при дисциплине *FIFO* (*first input, first output*), действующей внутри каждого потока. Тем самым закон сохранения (2) имеет место в подклассе консервативных дисциплин модели  $M_l|G_l|1|\infty$  с дисциплиной *FIFO* внутри потоков.

Тем не менее, если консервативная дисциплина такова, что попавший на прибор  $k$ -вызов имеет преимущество перед вызовами  $k$ -того потока, а выбор вызовов на обслуживание зависит лишь от имеющейся очереди, то порядок обслуживания внутри  $k$ -того потока не отражается на  $\omega_{k1}$ . В классе таких консервативных дисциплин формула Литтля (3) справедлива.

*Пример.* На дисциплине относительных приоритетов с дисциплинами FIFO или LIFO (last input, first output), или RS (random service) внутри потока  $k$ -вызовов

$$\omega_{k1} = \frac{\rho_{r2}}{(1 - \rho_{k-1})(1 - \rho_{k1})} \quad (\text{см. [14]}).$$

**Обоснование гипотезы.** В классе консервативных дисциплин модели  $M_r|G_r|1|_\infty$  рассмотрение гипотезы начнем с инвариантных в классе характеристик. Пример инвариантной характеристики – не выполненная к моменту  $t$  работа  $w(t)$ .

Для существования стационарного распределения у  $w(t)$  условие  $\rho_1 < 1$  необходимо и достаточно.

$$\text{Действительно, обозначим } \beta_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB_k(x), \quad k = \overline{1, r},$$

$$v(s) = s - \sum_{k=1}^r a_k (1 - \beta_k(s)), \quad s \geq 0.$$

$$\text{Верно интегральное уравнение Такача } Me^{-sw(t)} = e^{v(s)t} \left\{ 1 - s \cdot \int_0^t e^{-v(s)u} P(u) du \right\},$$

$s \geq 0, t > 0$  ( $P(t)dt$  — вероятность свободного состояния прибора в  $[t, t+dt)$  определяется из этого же уравнения). При  $t \rightarrow +\infty$  в силу свойств функции  $v(s)$  получаем

$$\omega(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} Me^{-sw(t)} = \begin{cases} \frac{s \cdot (1 - \rho_1)}{v(s)}, & \text{если } \rho_1 \leq 1, \quad s \geq 0, \\ 0, & \text{если } \rho_1 \geq 1, \end{cases}$$

При  $\rho_1 < 1$  функция  $\omega(s)$  есть преобразование Лапласа–Стилтьеса от распределения стационарной невыполненной работы  $w$ . Действительно,  $\omega(s)$  – вполне монотонная функция и, по правилу Лопиталья,  $\omega(s) \rightarrow 1$  при  $s \downarrow 0$ , что позволяет применить теорему Бернштейна.

Пусть  $w_0(t)$  — остаточное время обслуживания находящегося в момент  $t$  на приборе вызова.

При  $\rho_1 \leq 1$  в классе консервативных дисциплин модели  $M_r|G_r|1|_\infty$  существует инвариантное в этом классе стационарное распределение у  $w_0(t)$ .

Действительно, известно, что при  $\rho_1 \leq 1$

$$\omega_0(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} Me^{-w_0(t)} = 1 - \rho_1 + \sum_{k=1}^r a_k \frac{1 - \beta_k(s)}{s}, \quad s \geq 0, \quad (4)$$

где, как и выше, проверяется:  $\omega_0(s) = \text{Mexp}(-sw_0)$ , а  $w_0$  — стационарное остаточное время обслуживания находящегося на приборе вызова. При  $\rho_1 \leq 1$  из (4) находится (2).

Перейдем к сложным нестационарным характеристикам. Для любой консервативной дисциплины модели  $M_r|G_r|1|_\infty$  все нестационарные характеристики являются *регенерирующими* процессами с непрерывным или дискретным временем. Именно, существует случайный момент  $s_1 > 0$  такой, что течение процесса после  $s_1$  является точной вероятностной копией всего процесса, начинающегося в момент  $s_0 = 0$ . Тогда существует целая последовательность  $\{s_n\}$  следующих друг за другом таких моментов, для которых

случайные величины  $s_n, s_{n-1}, n \geq 1$ , независимы и одинаково распределены. В нашем случае случайная величина  $s_1$  есть:

- 1) для процессов с непрерывным временем промежутков свободного состояния прибора плюс следующий за ним период занятости  $\pi$ ;
- 2) для процессов с дискретным временем случайное число  $v$  обслуженных за период занятости вызовов.

Очевидно, что в классе консервативных дисциплин модели  $M_r|G_r|1|\infty$  величины  $\pi$  и  $v$  инварианты. Известно, что

$$\sigma \cdot M\pi = \begin{cases} \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} & \text{при } \rho_1 < 1, \\ +\infty & \text{при } \rho_1 \geq 1, \end{cases} \quad Mv = \begin{cases} \frac{1}{1 - \rho_1} & \text{при } \rho_1 < 1, \\ +\infty & \text{при } \rho_1 \geq 1, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\sigma = a_1 + \dots + a_r$ . Согласно теореме из [10], т. 2, с.446, стационарное распределение у регенерирующего процесса со *счетным* числом состояний существует, если:

- 1)  $Ms_1 < +\infty$  в случае непрерывного времени; 2)  $Ms_1 < +\infty$  и  $\{P(s_1 = n)\}$  – непериодическая последовательность в случае дискретного времени.

Отметим, что последовательность  $\{P(v = n)\}$  непериодична, а из (5) и равенств  $Ms_1 = \sigma^{-1} + M\pi$  в случае непрерывного времени,  $Ms_1 = Mv$  в случае дискретного времени следует равносильность условий  $Ms_1 < +\infty$  и  $\rho_1 < 1$  в обоих случаях.

Вышесказанное, в частности, приводит к следующему утверждению.

**Теорема 1.** В классе консервативных дисциплин модели  $M_r|G_r|1|\infty$  условие  $\rho_1 < 1$  достаточно для существования стационарных распределений вектор-процессов:

$$1) \{(\zeta(t), \xi_1(t), \dots, \xi_r(t)) : t \geq 0\}, \quad (6)$$

где  $\zeta(t) = 0$ , если в момент  $t$  прибор свободен, и  $\zeta(t)$  равно номеру потока вызова, находящегося на приборе в момент  $t$ , если в момент  $t$  прибор занят;

$$2) \{(\zeta_n, \xi_{1n}, \dots, \xi_{rn}) : n \geq 1\}, \text{ где } \zeta_n = \zeta(t_n), \quad \xi_{kn} = \xi_k(t_n), \quad k = \overline{1, r}, \quad n \geq 1. \quad (6')$$

Стационарные распределения  $\xi_k(t)$  и  $\xi_{k,n}$  (аналоги одной и той же реальной характеристики) могут не совпадать. Существуют публикации, устанавливающие связи между стационарными распределениями непрерывных и дискретных аналогов одной и той же “реальной” характеристики.

**Дальнейшее обсуждение.** Обсудим гипотезу для характеристик, являющихся регенерирующими процессами с *несчетным* множеством состояний. Примерами таких характеристик служат процессы  $\{w_k(t) : t \geq 0\}$  и  $\{u_k(t) : t \geq 0\}$ ,  $k \geq 1$ . Для них аналоги теоремы из [10], т.2, с.446, помимо  $Ms_1 < +\infty$  ( $\rho_1 < +\infty$ ) требуют условий типа сепарабельности, непрерывности, монотонности и т.д. Если же, например, “дискретизировать” процесс  $\{w_k(t) : t \geq 0\}$  – для  $n \geq 1$  ввести процессы  $\underline{w}_k^n(t) = \frac{m-1}{2^n}$  при  $w_k(t) \in \left[ \frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n} \right)$ ,

$\overline{w}_k^n(t) = \frac{m}{2^n}$  при  $w_k(t) \in \left[ \frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n} \right)$ ,  $m \geq 1$ , то при  $\rho_1 < 1$  к ним будет применима теорема из [10], т.2, с.446. Для установления существования стационарного распределения у  $w_k(t)$  на основе неравенств  $\underline{w}_k^n(t) \leq w_k(t) \leq \overline{w}_k^n(t)$  и

$\underline{w}_k^n(t) \leq \underline{w}_k^{n+1}(t)$ ,  $\overline{w}_k^n(t) \geq \overline{w}_k^{n+1}(t)$ ,  $n \geq 1$ ,  $t > 0$ , опять нужны свойства сепарбельности, непрерывности, монотонности. Вопрос о наличии таких свойств у процессов типа  $\{w_k(t): t \geq 0\}$ ,  $k = \overline{1, r}$ , в классе или в подклассах консервативных дисциплин — отдельная проблема!

*Пример.* Процесс  $\{w_k(t): t \geq 0\}$  монотонен:  $w(t_1, \omega) \leq w(t_2, \omega)$  при  $t_1 < t_2$  для любой траектории  $w(\cdot, \omega)$ , так как  $w(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} (x(t) - x(u))$ ,  $t \geq 0$  ([17], с.41), где

$\omega$  — элементарное событие,  $x(t)$  — суммарная работа, поступающая в систему в промежутке  $[0, t)$ , которая в нашем случае является сложным пуассоновским процессом.

Сложным пуассоновским процессам посвящена, например, монография [18].

Пусть  $h_k$ ,  $k = \overline{1, r}$ , — время пребывания  $k$ -вызова на приборе, т.е. промежуток времени с момента первого поступления  $k$ -вызова на прибор до момента его ухода из системы. При недопуске прерываний вызовов  $h_k$ ,  $k = \overline{1, r}$ , есть случайная длительность обслуживания  $k$ -вызова. Понятно, что в классе консервативных дисциплин модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$  величина  $h_k$ ,  $k = \overline{1, r}$ , не зависит от времени  $t$ , величины  $w_k(t)$  и  $h_k$  независимы и

$$u_k(t, \omega) = w_k(t, \omega) + h_k(\omega) \quad \text{для каждого } \omega. \quad (7)$$

Следовательно, полагая  $u_k(s, t) = Me^{-su_k(t)}$ ,  $\omega_k(s, t) = Me^{-sh_k(t)}$ ,  $h_k(s) = Me^{-sh_k}$ ,  $k = \overline{1, r}$ ,  $s \geq 0$ ,  $t > 0$ , из (7) получаем

$$u_k(s, t) = h_k(s) \cdot \omega_k(s, t). \quad (7')$$

Из (7'), по теореме непрерывности для преобразований Лапласа, заключаем, что у процессов  $\{u_k(t): t \geq 0\}$  и  $\{w_k(t): t \geq 0\}$  стационарные распределения существуют или нет одновременно. Это позволяет рассмотреть лишь один из процессов.

Другая идея доказательства гипотезы для процессов  $\{u_k(t): t \geq 0\}$  восходит к формулам Литтля, с одним из вариантов которых мы сталкивались (см.(3)).

Рассмотрим *подкласс* консервативных дисциплин модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$  с дисциплиной *FIFO* внутри потоков. В частности при недопуске прерываний обслуживания предположение о дисциплине *FIFO* не отражается на  $\xi_k(t)$ ,  $k = \overline{1, r}$ , но от него зависят  $u_k(t)$  (как и  $w_k(t)$ ).

Пусть  $u_n$ ,  $n \geq 1$ , — время пребывания в модели  $n$ -ного ушедшего из модели вызова. Нумерация (по  $n$ ) производится вне зависимости от того, к какому потоку относится обслуженный вызов.

*Следствие 1.* В подклассе консервативных дисциплин с дисциплиной *FIFO* внутри потоков условие  $\rho_1 < 1$  достаточно для существования стационарного распределения у последовательности

$$(\xi_n, u_n), n \geq 1. \quad (8)$$

*Доказательство* основано на следующей вариации формулы Литтля:

$$x \cdot M[e^{-(a_1 - a_1 x, u_n)} : \xi_n = i] = M[x^{\xi_n} : \xi_n = i], \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n \geq 1, \quad i = \overline{1, r}, \quad (9)$$

где  $M[\xi: A]$  — математическое ожидание случайной величины  $\xi$  на событии  $A$ .

Формула (9) – следствие того, что при дисциплине *FIFO* внутри потока  $i$ -вызовов,  $i = \overline{1, r}$ , в момент  $t_n$ ,  $n \geq 1$ , при условии, что в момент  $t_n - 0$  обслуживается  $i$ -вызов, число  $i$ -вызовов складывается из этого  $i$ -вызова и всех  $i$ -вызовов, поступивших в модель за  $u_n$ . Обозначим  $u_n(s) = M[e^{-su_n} / \zeta_n = i]$ ,  $s \geq 0$ ,  $n \geq 1$ ,  $i = \overline{1, r}$ , где  $M[\xi / A]$  – условное математическое ожидание случайной величины  $\xi$  при условии осуществления события  $A$ . По теореме 1, при  $\rho_i < 1$  существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\zeta_n = i) = P(\zeta = i) > 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M[x^{\xi_n} : \zeta_n = i] = M[x^{\xi} : \zeta = i]$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , где  $\zeta$  и  $\xi$  – стационарные значения  $\zeta_n$  и  $\xi_n$ . Следовательно, согласно (9) существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(s) = u_i(s) = M[(1 - sa_i^{-1})^{\xi_i} / \zeta_n = i] \cdot \frac{a_i}{a_i - s}, \quad s \in [0, a_i), \quad i = \overline{1, r}.$$

Итак, при  $\rho_i < 1$  найдено преобразование Лапласа–Стилтьеса от условного распределения стационарного времени пребывания вызова при условии, что это  $i$ -вызов. Одновременно доказано утверждение следствия 1.

**Одно уточнение.** Сформулируем уточнение гипотезы, вытекающее из [19]. Предварительно отметим, что дисциплина абсолютных приоритетов с дообслуживанием консервативна.

**Теорема 2.** а) В модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$  с абсолютными (дообслуживание) и относительными приоритетами условие  $\rho_{k1} < 1$  необходимо и достаточно для существования стационарных распределений у вектор-процессов

$$\{(\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)) : t \geq 0\} \quad \text{и} \quad \{(w_1(t), \dots, w_k(t)) : t \geq 0\}.$$

б) В модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$  с чередующимися приоритетами условие  $\rho_i < 1$  необходимо и достаточно для существования стационарных распределений у вектор-процессов  $\{(\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)) : t \geq 0\}$  и  $\{(w_1(t), \dots, w_k(t)) : t \geq 0\}$ .

Здесь внутри потоков действует дисциплина *FIFO*.

Если внутри потоков действует дисциплина *LIFO*, то теорема 2 справедлива с заменами  $\rho_{k1} < 1$  на  $\rho_{k1} \leq 1$  и  $\rho_i < 1$  на  $\rho_i \leq 1$  соответственно.

Обсудим второй этап развития модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$ .

Новые дисциплины обслуживания постоянно пополняют круг традиционных постановок задач математической теории модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$ . Помимо этого, второй этап развития модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$  включает ряд существенно новых постановок задач.

**Оптимизация.** Достоинства дисциплин обслуживания в реальных системах оценивают критерии эффективности, ставящие перед математиками специфические оптимизационные задачи (см., напр., [20–21]). Представление о таких оптимизационных задачах дает следующая постановка. Рассмотрим класс консервативных дисциплин модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$  в стационарном режиме функционирования средних характеристик, условия существования которых записываются в виде неравенств  $\rho_i < 1$ ,  $\rho_2 < +\infty$ .

Под переключениями прибора будем понимать следующее. При  $j \neq i$  происходит поступление на прибор  $j$ -вызова сразу после завершения обслуживания  $i$ -вызова, при  $i \neq j$  и допущении прерывания обслуживания – прерывание и замещение  $i$ -вызова на приборе  $j$ -вызовом. Переключений прибора не происходит при последовательном обслуживании вызовов каждого пото-

ка внутри периода занятости и при поступлении вызова в свободную систему.

Пусть за единицу времени ожидания  $k$ -вызова,  $k = \overline{1, r}$ , выплачивается штраф  $c_k > 0$ . Каждое переключение прибора с обслуживания  $i$ -вызова на обслуживание  $j$ -вызова влечет за собой штраф  $c_{ij} > 0$ .

Обозначим через  $\xi_k$  стационарную длину очереди из  $k$ -вызовов, а через  $\tau_{ij}$  — стационарное число переключений прибора в единицу времени с обслуживания  $i$ -вызовов на обслуживание  $j$ -вызовов.

Величины  $M\xi_k$  и  $M\tau_{ij}$  зависят от дисциплины обслуживания. Эффективность дисциплины будем оценивать следующим функционалом (от дисциплины):

$$I = \sum_{k=1}^r c_k \cdot M\xi_k + \sum_{\substack{i,j=\overline{1} \\ i \neq j}}^r c_{ij} M\tau_{ij}. \quad (10)$$

Функционал (10) определяет средние стационарные потери (суммарный штраф) в единицу времени от ожиданий вызовов и от переключений прибора и является примером *критерия эффективности*. Ставится задача нахождения дисциплины, доставляющей минимум функционалу (10) в классе консервативных дисциплин модели  $M_r|G_r|1|\infty$ , и вычисления  $\min I$ .

Особое внимание в теории модели  $M_r|G_r|1|\infty$  к дисциплинам абсолютных и относительных приоритетов в значительной степени вызвано следующим фактом.

Ограничимся случаем  $c_{ij}=0$ . Предварительно перенумеруем потоки таким образом, чтобы выполнялись неравенства  $\frac{c_1}{\beta_{11}} \geq \frac{c_2}{\beta_{21}} \geq \dots \geq \frac{c_r}{\beta_{r1}}$ .

**Теорема 3.** Функционал (10) для модели  $M_r|G_r|1|\infty$  минимизирует дисциплину:

1) в классе консервативных дисциплин — дисциплина абсолютных с дообслуживанием приоритетов, причем  $\min I = \sum_{k=1}^r \frac{c_k a_k \rho_{k2}}{(1 - \rho_{k-1})(1 - \rho_{k1})}$ ,

$$\rho_{01}=0;$$

2) в классе консервативных дисциплин без прерывания обслуживания — дисциплина относительных приоритетов, причем

$$\min I = \rho_2 \cdot \sum_{k=1}^r \frac{c_k a_k}{(1 - \rho_{k-1})(1 - \rho_{k1})}, \quad \rho_{01}=0.$$

Корректный метод доказательства первым наметил Питтель. Мы же сошлемся на общий результат, принадлежащий Климову [22–23].

В другом частном случае  $c_k=0$  и  $c_{ij}=d>0$  обозначим через  $\tau$  стационарное число переключений прибора в единицу времени. Тогда  $\tau = \sum_{\substack{i,j=\overline{1} \\ i \neq j}} \tau_{ij}$ .

Интуитивно ясно, что дисциплина чередующихся приоритетов доставляет минимум функционалу  $I=d \cdot M\tau$  в классе консервативных дисциплин без прерывания обслуживания модели  $M_r|G_r|1|\infty$ .

Существует обширная литература по выбору оптимальных дисциплин в различных классах дисциплин модели  $M_r|G_r|1|\infty$  при различных критериях потерь. Этими вопросами занимаются и в Армении (см., напр., [24–25]).

Напоследок отметим важность рассмотрения *нелинейных* критериев эффективности например, учитывающих дисперсии стационарных характеристик.

**Законы сохранения.** Законы сохранения играют значительную роль в моделях очередей. Это – общие уравнения, *инвариантные* в широких классах дисциплин. Остановимся на законах сохранения в классе консервативных дисциплин модели  $M_r|G_r|1|\infty$ .

1. Закон сохранения остаточного времени обслуживания  $w_0$ . Это – формулы (1) и (4), а также  $P(w_0 < x) = 1 - \rho_1 + \sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^x [1 - B_k(u)] du$ ,  $x > 0$ .

Пусть  $*$  – знак свертки,  $F^{n*}$  –  $n$ -кратная свертка  $F$  с собой, и  $\sigma \cdot B(x) = \sum_{k=1}^r a_k B_k(x)$ ,  $x \geq 0$ .

2. Законы сохранения работы. Это – интегральное уравнение Такача, формула Поллячека–Хинчина, а также

$$P(w < x) = (1 - \rho_1) \cdot \sum_{n \geq 0} \rho_1^n \cdot \left( \beta_1^{-1} \cdot \int_0^x [1 - B(u)] du \right)^{n*}, \text{ где } w - \text{стационарная невыпол-}$$

ненная работа.

3. Формулы Литтля. Примерами служат (3) и (9).

**Задержка** – промежуток времени, когда вызовы поступают, но не обслуживаются. Период занятости с задержкой  $y > 0$  (обозначаем  $T(y)$ ) есть промежуток времени, начинающийся с задержки  $y$ , в начале которой вызовы отсутствуют, и завершающийся первым после задержки моментом освобождения системы от вызовов.

Пусть  $n = (n_1, \dots, n_r)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_r)$ ,  $|n| = n_1 + \dots + n_r$ ,  $|x| = x_1 + \dots + x_r$ ,  $d$  – знак дифференциала  $d_x^+ = \prod_{k=1}^r d_{x_k}^+$ , а  $\prod_{k=1}^r$  означает, что произведение берется по тем  $k$ , для которых  $n_k > 0$ . Обозначим через  $\Pi_k(n, x)$  вероятность того, что за  $T(y)$  обслужено  $n_k$   $k$ -вызовов,  $k = \overline{1, r}$ , и их суммарная длительность обслуживания меньше  $x_k$ .

4. Имеет место следующий закон сохранения [26]:

$$d_x^+ \Pi_y(n, x) = e^{-\sigma(y+|x|)} \cdot y \cdot (y+|x|)^{|n|-1} \cdot \left( \prod_{k=1}^r \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} d_{x_k}^+ B_k^{n_k}(x_k) \right), \quad |n| > 0.$$

Данный закон сохранения можно записать в терминах преобразований Лапласа–Стилтьеса и производящих функций. Приведем лишь общеизвестное функциональное уравнение, определяющее период занятости  $\pi$ . Обозначим  $\sigma_k = a_1 + \dots + a_k$ ,  $k = \overline{1, r}$ . Функциональное уравнение

$$\sigma_k \cdot x = \sum_{i=1}^k a_i \beta_i (s + \sigma_k - \sigma_k \cdot x) \quad (11)$$

в области  $\{s: s \geq 0\}$  при условии  $\rho_{k1} \leq 1$  определяет единственное решение  $x = \pi_k(s)$ , такое, что: а)  $\pi_k(s) = \int_0^\infty e^{-sy} d\Pi_k(y)$ ,  $s \geq 0$ , где  $\Pi_k(y)$  – распределение

некоторой неотрицательной случайной величины; б)  $\int_0^{\infty} x d\Pi_k(x) < +\infty$  при  $\rho_{k1} < 1$ .

Решение уравнения (11) при  $k=\tau$  совпадает с  $\pi(s) = Me^{-\pi s}$ .

Остановимся на законе сохранения очереди в классе консервативных дисциплин без прерывания обслуживания модели  $M_r|G_r|1|\infty$  [27].

Если  $n=(n_1, \dots, n_r)$  и  $x=(x_1, \dots, x_r)$ , то  $x^n = x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r}$ .

Пусть  $t_m, m \geq 1$  – момент завершения  $m$ -того обслуживания. Для вектор-последовательности  $\{(\xi_m, \xi_{1m}, \dots, \xi_{rm}) : m \geq 0\}$  обозначим через  $p_{im}(n)$  вероятность того, что  $m$ -тым обслуживается  $i$ -вызов ( $\xi_m = i$ ), который после своего обслуживания оставляет очередь типа  $n$  ( $\xi_{km} = n_k, k = \overline{1, r}$ ). Введем производящие функции

$$P_{im}(x) = \sum_{|n| \geq 0} p_{im}(n) x^n = M[x_1^{\xi_{1m}} \dots x_r^{\xi_{rm}} : \xi_m = i], \quad i = \overline{1, r}, m \geq 1, 0 \leq x_i \leq 1,$$

$$P_m(x) = \sum_{i=1}^r P_{im}(x) = \sum_{|n| \geq 0} p_m(n) x^n = M\left(\prod_{k=1}^r x_k^{\xi_{km}}\right).$$

Здесь, очевидно,  $p_m(n)$  – вероятность того, что  $m$ -тый вызов после своего обслуживания оставляет очередь типа  $n$ .

**5. Теорема 4.** В классе консервативных дисциплин без прерывания обслуживания модели  $M_r|G_r|1|\infty$  справедлив следующий закон сохранения очереди:

$$\sum_{k=1}^r \frac{x_k P_{kn+1}(x)}{\beta_k (\sigma - ax)} = P_n(x) - \frac{\sigma - ax}{\sigma} P_n(0), \quad i = \overline{1, r}, n \geq 1, 0 \leq x_i \leq 1, \quad (12)$$

где  $\sigma - ax = \sum_{k=1}^r (a_k - a_k x_k)$ ,  $0 = \underbrace{(0, \dots, 0)}_r$ .

Так как согласно теореме 1 при  $\rho_1 < 1$  существуют пределы  $p_k(n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} p_{km}(n) \geq 0, k = \overline{1, r}, \sum_{k=1}^r \sum_{|n| \geq 0} p_k(n) = 1$ , то существуют стационарные производящие функции

$$P_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{kn}(x), \quad P(x) = \sum_{k=1}^r P_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x), \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, r},$$

такие, что (см. [1], с. 123–124)  $P_k(1) = \frac{a_k}{\sigma}, 1 = \underbrace{(1, \dots, 1)}_r, k = \overline{1, r}, P(0) = 1 - \rho_1$ .

Из (12) при  $\rho_1 < 1$  следует закон сохранения стационарной очереди [20]

$$\sum_{k=1}^r \frac{P_k(x)}{\beta_k (\sigma - ax)} (x_k - \beta_k (\sigma - ax)) = - \frac{\sigma - ax}{\sigma} (1 - \rho_1).$$

1. Для  $P_n'(0) = P(t_n < t, \xi_{kn} = 0, k = \overline{1, r}), n \geq 1, t > 0$ , справедлив закон сохранения

$$P_n'(0) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{m \geq k} \frac{(\sigma t)^m}{m!} e^{-\sigma t} \right) * \left( \frac{k}{n} \int_0^t \frac{(\sigma u)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\sigma u} dB^{n*}(u) \right). \quad (13)$$

При  $\rho_1 < 1$  подстановка из (13)  $P_n(0) = P_n^\infty(0)$  в (12) уточняет закон сохранения очереди:

$$\sum_{k=1}^r \frac{x_k P_{kn+1}(x)}{\beta_k (\sigma - ax)} = P_n(x) - \frac{\sigma - ax}{\sigma} \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \int_0^\infty \frac{(\sigma u)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\sigma u} dB^{n*}(u) \right), \quad i = \overline{1, r}, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

2. Согласно теореме 1 легко вычисляется стационарная вероятность  $p_k$ ,  $k = \overline{1, r}$ , того, что обслуживается  $k$ -вызов. Она инвариантна в рассматриваемом классе дисциплин:

$$p_k = a_k \beta_{k1}, \quad k = \overline{1, r}. \quad (14)$$

**Параметрические дисциплины.** В модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$  интерес вызывают подклассы консервативных дисциплин – дисциплины, зависящие от свободных параметров, варьируя которыми (параметрами) разработчик технической системы (сам!) может на этапе проектирования подобрать конкретные значения параметров, наиболее подходящие в конкретных условиях.

Л.Клейнрок (см. [14], с.153) приводит следующий пример, подтверждающий важность *параметрических дисциплин*. Перед разработчиком технической системы ставится задача. Подобрать конкретную дисциплину модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$  так, чтобы отношения  $\omega_{k1} / \omega_{k-1,1}$ ,  $k = \overline{1, r}$ ,  $\omega_{01} = 1$ , лежали в заранее заданных, допустимых законом сохранения (2) пределах.

Предложен ряд параметрических дисциплин (см., напр., [14, 19, 20, 28]), анализ которых составил содержание важного раздела теории модели  $M_r | G_r | 1 | \infty$ .

Среди конкретных дисциплин, принадлежащих классу параметрических дисциплин, наиболее интересными являются “крайние” случаи. Опишем три параметрические дисциплины, “крайними” случаями которых служат дисциплины *FIFO* и относительных приоритетов. Прерывания обслуживания в них не допускаются.

**Категорийные во времени приоритеты.** Временная ось  $[0, +\infty)$  разделена на “кванты”:  $[0, T)$ ,  $[T, 2T)$ ,  $[2T, 3T)$ , ..., где  $T > 0$ . Вызовы, поступающие в систему на разных квантах, обслуживаются по дисциплине *FIFO*, а на одном кванте – по дисциплине относительных приоритетов. Число  $T$  – единственный параметр дисциплины. При  $T \downarrow 0$  приходим к дисциплине *FIFO*, а при  $T \rightarrow +\infty$  – к дисциплине относительных приоритетов.

**Дисциплина Прабуху.** Поступая в момент  $t$  в модель,  $k$ -вызов,  $k = \overline{1, r}$ , приобретает индекс  $t + u_k$ , где  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r$ . В любой момент завершения обслуживания из очереди на прибор выбираем вызов с наименьшим индексом. Если таких вызовов несколько, то берем поступивший раньше (или позже). Параметры  $v_k = u_k - u_{k-1}$ ,  $k = \overline{2, r}$ , определяют дисциплину. Случаи  $v_k = 0$  и  $v_k \rightarrow +\infty$ ,  $k = \overline{2, r}$ , дают дисциплины *FIFO* и относительных приоритетов.

**Дисциплина Клейнрока.**  $k$ -вызов, поступивший в момент  $\tau > 0$  в модель и не попавший до момента  $t$ ,  $t > \tau$ , на прибор, получает приоритет  $q_k(t) = b_k \cdot (t - \tau)$  в момент  $t$ , где  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r > 0$  – заданные числа. В моменты окончаний обслуживаний из вызовов в очереди на обслуживание выбираем вызов с наибольшим приоритетом. Если таких вызовов несколько, то среди них берем поступивший в систему раньше (или позже). Дисциплина Клейнрока –  $(r-1)$ -параметрическая дисциплина, зависящая от отношений (парамет-

ров)  $b_2/b_1, b_3/b_2, \dots, b_r/b_{r-1}$ . Случаи  $b_1 = \dots = b_r$  и  $b_{k+1}/b_k \rightarrow 0, k = \overline{1, r-1}$ , соответствуют дисциплинам *FIFO* и относительных приоритетов.

По принципу построения этих дисциплин строят их аналоги с допущением прерываний обслуживания, в которых “крайними” случаями выступают дисциплины *FIFO* и абсолютных приоритетов.

Другую разновидность дисциплины Клейнрока мы получим, если в функции  $q_k(t)$  числа  $b_k, k = \overline{1, r}$ , удовлетворяют неравенствам  $0 > b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r$  [29]. Тогда “крайние” случаи – это дисциплины *LIFO* и относительных приоритетов с дисциплиной *LIFO* внутри потоков.

Из параметрических дисциплин инженерной теории математик выделяет те, которые удовлетворяют определенным критериям эффективности и допускают аналитическое изучение.

**Второй этап** развития модели  $M_r|G_r|1|\infty$  мы ограничиваем не временными рамками, а завершением изучения следующих вопросов.

- Систематизация законов сохранения в классе и подклассах консервативных дисциплин, их взаимосвязей и применений [14].
- Выбор и включение параметрических дисциплин в математическую теорию с точки зрения традиционных постановок задач [19].
- Прогресс в предельных теоремах теории вероятностей отразился на теории очередей. Работы Гнеденко [1], Прохорова [30], Кингмана [31] по переходным явлениям базовой модели  $GT|G|1|\infty$  инициировали исследования по предельным теоремам для дисциплин абсолютных и относительных приоритетов в модели  $M_r|G_r|1|\infty$  в предположении конечности дисперсий времен обслуживания (Даниелян [19], Прабху [28], Азларов [32], Попов [33]). Приняв заверченный вид, эти результаты заложили основу раздела предельных теорем модели  $M_r|G_r|1|\infty$  [34-37].

**Предельные теоремы.** Классификация предельных теорем при дисциплинах абсолютных и относительных приоритетов модели  $M_r|G_r|1|\infty$  будет дана по загрузкам  $\rho_{n1}, n = \overline{1, r}$ , на примере виртуальных времен ожидания  $w_k(t), k = \overline{1, r}$ . В первую очередь интерес представляют дисциплины *FIFO*, *LIFO* и *RS (random service)* внутри потоков. Ограничимся рассмотрением дисциплины *FIFO*.

**Критическая загрузка.** При  $\rho_{k1} < 1$  для процесса  $\{w_k(t): t \geq 0\}$  существует стационарный режим:  $w_k(t) \Rightarrow w_k$  при  $t \rightarrow +\infty$ , где  $w_k$  – стационарное время ожидания  $k$ -вызова. Однако  $w_k$  неограниченно растет, когда  $\rho_{k1}$  “приближается” к единице снизу. Предельная теорема определяет порядок роста  $w_k$ .

Если  $\rho_{k1} < 1$ , то существует предел [1]:  $\lim_{\rho_{k1} \uparrow 1} P\left(\frac{w_k}{Mw_k} < x\right) = 1 - e^{-x}, x > 0$ .

Только ли экспоненциальное распределение является предельным для вектора  $(w_1, \dots, w_k)$  при  $\rho_{k1} \uparrow 1$ ? Многомерные предельные теоремы, в частности, дают отрицательный ответ на вопрос.

**Фиксированные загрузки.** При  $\rho_{k1} \geq 1$  для процесса  $\{w_k(t): t \geq 0\}$  стационарный режим не существует:  $w_k(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Предельные теоремы определяют порядок роста  $w_k(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Пусть  $\Phi(x)$ ,  $-\infty < x \leq +\infty$ , – функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Следующие результаты взяты из [36].

1. Если  $\rho_{k1}=1$ ,  $\rho_{k2}<+\infty$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P\left(\frac{(1-\rho_{k-11})w_k(t)}{\sqrt{4\rho_{k2} \cdot t}} < x\right) = 2 \cdot \Phi(x) - 1, x \geq 0$ .
2. Если  $\rho_{k-11}=1$ ,  $\rho_{k-12}<+\infty$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P\left(\frac{4\rho_{k-12}}{(1-\rho_{k1})^2 \cdot t^2} w_k(t) < x\right) = 2 \cdot (1 - \Phi(x^{1/2})), x \geq 0$ .
3. Если  $\rho_{k-11} < 1$ ,  $\rho_{k1} > 1$ ,  $\rho_{k2} < +\infty$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P\left(\frac{w_k(t) - \frac{1-\rho_{k1}}{1-\rho_{k-11}} \cdot t}{\tau_k \cdot \sqrt{t}} < x\right) = \Phi(x), -\infty < x \leq +\infty$ .

$$\text{Здесь обозначено } \tau_k = 2 \cdot \sqrt{\frac{\rho_{k2}(1-\rho_{k-11}) + \rho_{k-12}(1-\rho_{k1})}{(1-\rho_{k-11})^3}}.$$

Остальные случаи  $\rho_{k1} > 1$ ,  $\rho_{k2} < +\infty$  приводят к предельному закону  $\Phi(x)$ .

Многомерные предельные теоремы для вектора  $(w_1(t), \dots, w_r(t))$  при фиксированных нагрузках завершают, исчерпывают эту постановку задачи.

Другой тип задач при фиксированных нагрузках иллюстрирует следующий результат.

Если  $\rho_{k1}=1$ ,  $\rho_{k2}<+\infty$ , то (см. [37] и имеющуюся там библиографию)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P\left(\frac{(1-\rho_{k-11})w_k(t)}{\sqrt{4\rho_{k2} \cdot t}} < x \mid \inf_{0 \leq u \leq t} w_k(u) > 0\right) = 1 - e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad x \geq 0.$$

Здесь  $P(A/B)$  – условная вероятность события  $A$  при условии события  $B$ .

В качестве предельного закона выступает распределение Рэлея.

**Переходные явления.** Более общая и сложная ситуация, чем при фиксированных нагрузках, возникает, когда мы выясняем асимптотическое поведение  $w_k(t)$  при “больших”  $t$  и  $\rho_{k1}$ , “близком” к 1. Ситуация требует доказательства предельных теорем для  $w_k(t)$ , когда  $t \rightarrow +\infty$  и  $\rho_{k1} \rightarrow 1$  согласованным образом,  $t \cdot (1-\rho_{k1}) \rightarrow \tau$ ,  $0 < \tau < \infty$ .

Предельные распределения для  $w_k(t)$  в этом общем случае, очевидно, включают вышеприведенные примеры [38].

На современном этапе развития модели  $M_r|G_r|1|_\infty$  исследуются традиционные задачи параметрических дисциплин для времен ожидания (или пребывания) и осуществляется асимптотический анализ в нескольких направлениях.

Доказано много предельных теорем для нестационарных характеристик модели  $M_r|G_r|1|_\infty$  при дисциплинах абсолютных и относительных приоритетов, когда дисперсии времен обслуживания бесконечны. Именно, предполагается, что имеет место разложение  $\rho_k(s) = \sum_{k=1}^r a_k \beta_k(s) = \sigma_k \cdot \rho_{k1} \cdot s + B_k \cdot s^{\gamma_k} (1 - o(1))$ ,  $s \rightarrow 0$ ,  $s > 0$ , где  $1 < \gamma_k < 2$ ,  $k = \overline{1, r}$  (см. [37, 39–43]). Это условие при  $\gamma_k = 2$  переходит в условие конечности  $\beta_{k2} < +\infty$ .

Появились предельные теоремы и для параметрических дисциплин модели  $M_r|G_r|1|_\infty$  [44–46].

Для виртуальных времен ожидания при дисциплинах абсолютных и относительных приоритетов модели  $M_r|G_r|1|\infty$  устанавливаются функциональные предельные теоремы. Используется аппарат сходимости вероятностных мер (см. [47]) в пространствах Прохорова, Скорохода и т.д.

Наконец постановки задач теории суммирования независимых случайных величин переключаются в теорию модели  $M_r|G_r|1|\infty$ : это скорости сходимости в предельных теоремах, закон повторного логарифма, большие уклонения и т.д.

*Информация о модели Клейнрока.* Дисциплину Клейнрока плюс модель  $M_r|G_r|1|\infty$  называем моделью Клейнрока. Как и в других параметрических дисциплинах, главной характеристикой здесь считают времена ожидания. Ясно, что если  $b_k = b_{k+1}$  при некотором  $k$ , то  $w_k(t) = w_{k+1}(t)$ . Поэтому потоки  $k$  и  $(k+1)$ -вызовов можно объединить в один пуассоновский поток с параметром  $a_k + a_{k+1}$  и с функцией распределения времени обслуживания

$$\frac{a_k}{a_k + a_{k+1}} \cdot B_k(x) + \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}} \cdot B_{k+1}(x), \quad x \geq 0.$$
 Таким образом, достаточно рассмотреть случай  $b_1 > b_2 > \dots > b_r > 0$ .

В отличие от "крайних" случаев дисциплины Клейнрока (FIFO и дисциплина относительных приоритетов), по самой дисциплине Клейнрока опубликовано мало работ.

Разновидности дисциплин Клейнрока с допущением прерываний посвящена монография [48]. Однако результаты там неокончательны и относятся к частной модели с показательно распределенными временами обслуживания.

Перейдем к результатам в модели  $M_r|G_r|1|\infty$ .

1. При условии  $\rho_1 < 1$  в [14], с.152–158, получена система линейных уравнений, определяющая шаг за шагом  $\omega_{k1}$ ,  $k = \overline{1, r}$ .
2. Результат, аналогичный результату из [14], найден Джуном [29], но для случая  $0 > b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r$ .
3. В работе [49] Даниеляном при  $\rho_1 < 1$  найдена функция  $\omega_r(s)$ ,  $s \geq 0$ .
4. В работе [50] Даниеляном и Лизе получена система уравнений, определяющая функции  $\omega_k(s, t)$ ,  $k = \overline{1, r}$ ,  $s \geq 0$ ,  $t \geq 0$ .
5. В работах Багчи и Салливана [51], Даниеляна и Сардаряна [52] с целью нахождения средних  $\omega_{k1}$  рассмотрена более общая функция приоритета  $q_k(t) = a_k + b_k(t - \tau)$ .
6. Неттерман и Адири [53], а также Клейнрок [14] рассмотрели вопрос вычисления средних  $\omega_{k1}$  при выпуклой функции  $q_k(t)$  приоритета, ничего по сути дела не добавляющей к структуре поведения модели.

Последние работы по модели Клейнрока относятся лишь к вопросам оптимизации, а не анализа. Ссылаться на них мы не будем. Мы сформулируем без доказательства новый результат, основанный на работе [50]. Обозначим (если существуют)

$$\omega_j(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_j(s, t), \quad j = \overline{1, r}, \quad s \geq 0. \quad (15)$$

По теореме непрерывности для преобразований Лапласа, поточечная сходимость (15) равносильна слабой сходимости  $P(w_j(t) < x) \Rightarrow P(w_j < x)$  при  $t \rightarrow +\infty$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $x \geq 0$ .

Пусть

$$\bar{a}_{ik+1} = a_i \cdot \left[ 1 - \frac{b_{k+1}}{b_i} \right], \quad k = \overline{1, r-1}, \quad i = \overline{1, k}, \quad \bar{\sigma}_k = \sum_{i=1}^k \bar{a}_{ik+1}, \quad \bar{\rho}_{kl} = \sum_{i=1}^k \bar{a}_{ik+1} \cdot \beta_{il}.$$

**Теорема 5.** Пусть  $\rho_1 < 1$ . Тогда в модели Клейнрока существуют пределы (15), и функции  $\omega_k(s)$  шаг за шагом от  $k=r$  до  $k=1$  определяются из системы уравнений

$$\omega_k(s) = \frac{(1 - \rho_1)\tau}{\rho_{1k}(\tau)} + \sum_{j=k+1}^r a_j (1 - \beta_j(s)) \left\{ \frac{\omega_j(b_j q_{jk}(\tau))}{\rho_{jk}(\tau)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^k \left[ \frac{\omega_j(b_j q_{n+1k}(\tau))}{\left(1 - \frac{b_j}{b_n}\right) \rho_{nk}(\tau)} - \frac{\omega_j(b_j q_{nk}(\tau))}{\left(1 - \frac{b_j}{b_{n-1}}\right) \rho_{nk}(\tau)} \right] \right\}, \quad s \geq 0,$$

где  $\tau = \bar{\mu}_{k+1}(s)$  и  $\sum_{j=r+1}^r \equiv 0$ . Здесь при  $1 \leq n \leq k < r$ ,  $s \geq 0$ ,  $b_n = +\infty$  обозначено

$$q_{nk}(s) = \frac{s}{b_{n-1}} + \sum_{i=n}^k a_i \cdot \left( \frac{1}{b_i} - \frac{1}{b_{n-1}} \right) (1 - \beta_i(s)),$$

а  $\bar{\mu}_{k+1}(s)$  есть решение в области  $\{s: s \geq 0\}$  функционального уравнения

$$s + \bar{\sigma}_k - \bar{\mu}_{k+1}(s) = \sum_{i=1}^k \bar{a}_{ik+1} \cdot \beta_i(\bar{\mu}_{k+1}(s)).$$

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 10.09.2000

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А., Димитров Б.Н., Климов Г.П., Матвеев В.Ф. Приоритетные системы обслуживания. М.: Изд-во МГУ, 1973, 447с.
2. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами. М.: Мир, 1973, 279с.
3. Сб.: Вероятностные задачи в структурно-сложных системах коммутации (под ред. Башарина Г.П). М.: Наука, 1969.  
Сб.: Массовое обслуживание в системах передачи информации (под ред. Башарина Г.П). М.: Наука, 1969.
4. Климов Г.П., Мишковой Г.К. Приоритетные системы обслуживания с ориентацией. М.: Изд-во МГУ, 1979, 223с.
5. Ушаков В.Г. Исследование приоритетных систем обслуживания с эрланговскими входящими потоками. – Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МГУ, 1978.
6. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966, 243с.
7. Tang Das Cong. Collective marks and waiting-time problems. Amsterdam: Amsterdam Univ. Press, 1995, 118p.
8. Броди С.М., Погосян И.А. Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания. Киев: Наукова думка, 1973, 128с.
9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966, 671с.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. М.: Мир, 1984, т.1, 527с. и 1984, т. 2, 751с.
11. Постников А.Г. Тауберова теория и ее применения. – Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, М., 1979. CXLIV, 147с.
12. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971, т. 1, 664с.
13. Авен О.И., Коган Я.В. Математические модели сложных вычислительных систем. – Автоматика и телемеханика. М., 1971, No1, с.109-127.

14. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979, 600с.
15. Авен О.И., Коган Я.В. Управление вычислительным процессом в ЭВМ. М.: Энергия, 1978, 240с.
16. Чжун Кан-лай. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964, 428с.
17. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368с.
18. Корольюк В.С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. Киев, Наукова Думка, 1975, 139с.
19. Даниелян Э.А. Математическая теория приоритетных моделей  $M_n|G_n|1|\infty$ . –Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук., М.: МГУ, 1980, 257с.
20. Бронштейн О.И., Духовный И.М. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. М.: Наука, 1976, 220с.
21. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация. Томск, Изд-во Томского унив., 1984, 235с.
22. Климов Г.П. Системы обслуживания с разделением времени, I. – Теор. вероятн. и ее прим., 1974, т. XIX, No3.
23. Климов Г.П. Системы обслуживания с разделением времени, II. –Теор. вероятн. и ее прим., 1978, т. XXIII, No2.
24. Даниелян Э.А., Попов Г.А. Оптимизация процесса обслуживания в одном классе стохастических моделей. Ер., Изд-во ЕГУ, Математика, 1986, в.5, с.23-36.
25. Оганян Г.Г. Анализ и проектирование интеллектуальных обучающих систем. – Дисс. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. Ер., ГИУА, 1999, 113с.
26. Даниелян Э.А. О периоде занятости общей одноканальной системы массового обслуживания. – ДАН Арм. ССР, 1978, т. LXVI, No1, с.7-14.
27. Хачикян Х.З., Седракян Г. Об одном законе сохранения теории очередей. – сб. ГИУА: Моделирование, оптимизация, управление, 2000, в. 4, с.35-40.
28. Prabhu N.U. Stochastic Storage Processes. – Applications of Mathematics, Springer-Verlag, 1980. v.15. 140 p.
29. Junn Hsu. A Continuation of Delay Dependent Queue Discipline. – Oper.Res., 1970, No4. v.18. pp. 733-738.
30. Прохоров Ю.В. Переходные явления в процессах массового обслуживания. – Лит. матем. сборник, 1963, No1, т. III, с. 199-205.
31. Kingman J. The Single Server Queue in Heavy Traffic – Proc. Camb. Philos. Soc. 1961. No4. v.57, pp. 902-903.
32. Azlarov T.A., Husainov Ja.M. – Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1976, 575 p.
33. Попов Г.А. Асимптотические разложения периодов занятости в системе  $M_n|G_n|1|\infty$  с абсолютным приоритетом и идентичным обслуживанием заново.– Молодой научный сотрудник, ЕГУ, 1978, No2, с.28-32.
34. Даниелян Э.А., Земляной Н.С. Класс предельных распределений совместного стационарного распределения времен ожидания некоторых систем  $M_n|G_n|1|\infty$  в условиях критической загрузки. – ДАН Арм. ССР, 1980, т. LXX, No1, с. 3-10.
35. Даниелян Э.А. Описание одного класса предельных распределений в одноканальных приоритетных системах. – Acta Cybernetica, Hungary, 1981, pp.105-118.
36. Danielian E.A. Asymptotical investigation of the virtual waiting time for priority queues in a busy-store. – Current Topics in Cybernetics and Systems. Springer-Verlag, 1978. v.10. pp.80-82.
37. Попов Г.А. Асимптотический анализ некоторых систем с пуассоновскими поступлениями в условиях малой и единичной загрузок. – Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук., Ташкент, 1981, 121с.
38. Даниелян Э.А. К асимптотике периода занятости и времени ожидания приоритетных систем  $M_n|G_n|1|\infty$  при критической загрузке. – Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1975, т. X, No3, с.272-287.
39. Даниелян Э.А. Предельные теоремы для времени ожидания одноканальных приоритетных систем. – ДАН Арм. ССР, 1980, т. XXI, No3, с.129-135.
40. Читчан Р.Н. Предельные теоремы в приоритетных моделях  $M_n|G_n|1|\infty$  в условиях критической загрузки. – Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук., Вильнюс, 1982, 137с.
41. Саакян В.Г. Дисциплина случайного выбора в модели с относительными и абсолютными приоритетами. – Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук., М.: МИЭМ, 1985, 141с.

42. Терзисян Г.А. Некоторые многомерные предельные теоремы в модели  $M_r|G_r|1|\infty$  с абсолютными приоритетами. – Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук., М.: МИЭМ, 1987, 124с.
43. Аллуш Тарек Абуллкафи. Актуальные времена ожидания в модели  $M_r|G_r|1|\infty$  с абсолютным и относительным приоритетами. – Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук., Ер., ЕГУ, 1995, 90с.
44. Хостикиян П.Т. Анализ моделей с категориальными во времени приоритетами.- Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук., Ташкент, 1982, 110с.
45. Сандрян С.Н. Анализ модели Прабху. – Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук., Ер., ЕГУ, 1991, 136с.
46. Симонян А.Р. Предельные теоремы в модели Прабху при фиксированных нагрузках. – Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук., Ер., ЕГУ, 1991, 119с.
47. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351с.
48. Клейнрок Л. Коммуникационные сети. М.: Наука, 1975, 256с.
49. Даниелян Э.А. Об одной системе с динамическими приоритетами. – Уч. зап. ЕГУ, 1980, No3, с.19-25.
50. Danielian E.A., Lieze F. The analysis of a model with time dependent priorities. – Rostock Math. Kolloq. ,Germany, 1991,v.43. pp. 39-54.
51. Bagchi U., Sullivan R.S. Dynamic Non-Preemptive Queues with General, Linearly Increasing Priority Function. – Oper. Res. , 1985. v.35. pp. 1278-1298.
52. Даниелян Э.А., Сардарян С.Г. Средние стационарные времена ожидания в линейной параметрической модели. – Матем. вопросы киберн. и вычисл. техн., Ер., 1988, т. XV, с.194-198.
53. Netterman A., Adiri A. A Dynamic Priority Queues with General Concave Priority Function. – Oper. Res., 1979, v. 27, pp. 1088-1100.

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Խ.Ջ. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

## ՀԵՐԹԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ $M_r|G_r|1|\infty$ ՄՈԴԵԼԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ ՏԵՆԴԵՆՏՆԵՐԸ

### Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքը հերթերի տեսության մի բնագավառի՝  $M_r|G_r|1|\infty$  մոդելի ուսումնասիրման հակիրճ ամփոփումն է: Ներկայացված են բնութագրերի հետազոտման հայտնի մեթոդները բացարձակ, հարաբերական և իրար հաջորդող նախապատվություններով դասական հերթակարգերի համար: Հիմնավորվում և կատարվում է անցում ավելի բարդ պարամետրական հերթակարգերին, իսկ հետագայում՝ նաև պահպանողական հերթակարգերի դասին: Հատուկ ուշադրություն է դարձված ստացիոնար բաշխումների գոյության պայմաններին և պահպանման օրենքներին: Մասնավորապես, ապացուցված են երկու նոր պահպանման օրենքներ՝ հերթերի երկարությունների վերաբերյալ: Քննարկված է օպտիմիալացման խնդիրների շրջանակի պահպանողական հերթակարգերի դասի և նրա որոշ ենթադասերի դեպքում: Նշված են բնութագրերի ասիմպտոտիկ վերլուծության (սահմանային թեորեմների) ուղղությունները տարբեր ծանրաբեռնվածությունների պայմաններում:

Աշխատանքի վերջում ձևակերպված է մի նոր արդյունք՝ գտնված է Կելյեռոքի պարամետրիկ հերթակարգի դեպքում ստացիոնար սպասման ժամանակների բաշխման ֆունկցիաները որոշող հավասարումների համակարգ՝ Լապլաս-Ստիլտյեսի ձևափոխության տերմիններով:

E.A. DANIELIAN, KH.Z. KHACHIKYAN

## TENDENCIES OF THE $M_r|G_r|1|\infty$ MODEL'S STUDY

### Summary

The article is a short review of a queuing model  $M_r|G_r|1|\infty$ . First of all, methods for analysis of the  $M_r|G_r|1|\infty$  model's characteristics with classic disciplines such as pre-emptive, head-of-the-line and alternating priorities are presented. A transition to analysis of parametric disciplines and further to class of conservative disciplines is justified and implemented. Special attention is paid to conditions for existence of stationary distributions and preservation laws. Particularly, two new preservation laws for stationary distributions of queue lengths are established. The range of optimization problems for the class of conservative disciplines and some of its subclasses are presented. Directions of asymptotic analysis under different traffic intensities are described. A new result for stationary waiting time distributions in terms of Laplace-Stieltjes transform is formulated in case of Kleinrock's parametric discipline.