ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,2001 Естественные науки

Математика

УДК 517.518

И.Э.ДАНИЕЛЯН, Г.В.МИКАЕЛЯН

НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ФУНКЦИИ

Получено новое интегральное представление медленно меняющейся функции $L(t)$:

$$L(t)=\eta(t)\cdot\int_{t_0}^{t} b(x)\,d\ln x\,,\ t\geq t_0>0\,,$$

где $\eta(t)$ измерима на $[t_0,+\infty)$, $b(t)$ непрерывна на $[t_0,+\infty)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}(b(t)/L(t))=0$.

Данное представление позволяет расширить классический результат Д.Д. Адамовича относительно эквивалентных медленно меняющихся функций и дополнить утверждение одной из теорем А.А. Голдберга.

1^0. В теории медленно меняющихся функций (м.м.ф.) основной является теорема И.Караматы о представлении ([1], теорема 2.1): определенная на $R^+=(0,+\infty)$ функция $L(t)$ является м.м.ф. тогда и только тогда, когда найдутся удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\to+\infty} a(t)=1\,,\qquad \lim_{t\to+\infty} b(t)=0 \tag{1}$$

измеримая на $[1,+\infty)$ функция $a(t)>0$ и непрерывная на $[1,+\infty)$ функция $b(t)$, такие, что

$$L(t)=a(t)\cdot\exp\left\{\int_1^t b(x)\,d\ln x\right\},\quad t\geq 1\,. \tag{2}$$

Нами установлено новое представление м.м.ф.

Теорема 1. Определенная на R^+ функция $L(t)>0$ медленно меняется тогда и только тогда, когда найдутся константы $t_0>0$, $c>0$ и удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{a(t)}{L(t)}=0,\qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{b(t)}{L(t)}=0 \tag{3}$$

измеримая на $[t_0,+\infty)$ функция $a(t)$ и непрерывная на $[t_0,+\infty)$ функция $b(t)$, такие, что

$$L(t)=a(t)+c+\int_{t_0}^{t} b(x)\,d\ln x\,. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Выберем $t_0 > 0$, исходя из следующих двух условий.

1. Функция L ограничена на конечных сегментах из $[t_1,+\infty)$, где $t_1 > 0$ – некоторая константа ([1], с.22). Это обеспечивает интегрируемость функции $x^{-1}L(x)$ на конечных сегментах из $[t_1,+\infty)$, в частности, существование при любом $\lambda > 1$ интегралов

$$a_0(t)=\frac{1}{\ln\lambda}\int_t^{\lambda t}\frac{L(t)-L(x)}{x}dx = L(t)-\frac{1}{\ln\lambda}\int_t^{\lambda t}x^{-1}L(x)dx \quad \text{при} \quad t \ge t_1 .$$

2. Для измеримой на $[t_1,+\infty)$ функции $a_0(t)$ справедливы неравенства

$$L(t)-\sup_{1\le x\le\lambda}L(xt)\le a_0(t)\le L(t)-\inf_{1\le x\le\lambda}L(xt),$$

откуда, по теореме о равномерной сходимости ([1], теорема 1.1), получаем первое соотношение (3) для $a_0(t)$. Выберем $t_0 > t_1$ так, чтобы

$$L(t)-a_0(t)=L(t)\cdot\left\{1-\frac{a_0(t)}{L(t)}\right\}>0 \text{ при } t\ge t_0. \tag{5}$$

Введем следующую константу: $c_0 \overset{def}{=} \dfrac{1}{\ln\lambda}\displaystyle\int_{t_0}^{\lambda t_0}x^{-1}L(x)dx$.

Для функции $b_0(t)=\dfrac{1}{\ln\lambda}\{L(\lambda t)-L(t)\}$ медленное изменение L влечет за собой второе соотношение (3). Функция $t^{-1}b_0(t)$ интегрируема на $[t_0,t]$ при всех $t\in(t_0,+\infty)$. Легко проверяется тождество

$$L(t)=a_0(t)+c_0+\int_{t_0}^{t}x^{-1}b_0(x)dx, \qquad t\ge t_0. \tag{6}$$

Функция $L_0(t)=c_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}x^{-1}b_0(x)dx$, $t\ge t_0$, непрерывна на $[t_0,+\infty)$ и, будучи в силу (5) положительной на $[t_0,+\infty)$, продолжаема непрерывным образом на R^+ до м.м.ф., скажем, L_0. Представление непрерывной L_0 типа (6) с той же константой t_0, подставленное в (6), доказывает необходимость.

Достаточность. Покажем, что L продолжаема на R^+ до м.м.ф.

Для любого $\varepsilon\in(0,1)$ согласно (3) найдется $t_1 > t_0$ такое, что

$$\left|\frac{a(t)}{L(t)}\right|<\varepsilon \text{ и } \left|\frac{b(t)}{L(t)}\right|<\varepsilon \text{ при } t>t_1. \tag{7}$$

На основе (4) запишем неравенство

$$\left|\frac{L(\lambda\cdot t)}{L(t)}-1\right|\le\left|\frac{a(\lambda\cdot t)}{L(\lambda\cdot t)}\right|\cdot\left|\frac{L(\lambda\cdot t)}{L(t)}-1\right|+\left|\frac{a(\lambda\cdot t)}{L(\lambda\cdot t)}-\frac{a(t)}{L(t)}\right|+\int_t^{\lambda\cdot t}x^{-1}\left|\frac{b(x)}{L(x)}\right|\cdot\frac{L(x)}{L(t)}dx,$$

где $\lambda > 1$ произвольно. С учетом (7) при $t \geq t_1$ последнее неравенство преобразуется:

$$\left|\frac{L(\lambda \cdot t)}{L(t)} - 1\right| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left\{2 + (\ln \lambda) \cdot \sup_{1 \leq x \leq \lambda} \frac{L(xt)}{L(t)}\right\}, \qquad t \geq t_1 .$$

Из-за произвольности $\lambda > 1$ в оценках получаем

$$0 \leq \rho_\lambda(t) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\{2 + \rho_\lambda(t) \cdot (\ln \lambda)\}, \quad t \geq t_1 , \tag{8}$$

где обозначено

$$\rho_\lambda(t) = \sup_{1 \leq x \leq \lambda} \frac{L(xt)}{L(t)} .$$

Пусть последовательность $\{t_n\}$ такова, что

$$t_n \to +\infty \text{ и } \rho_\lambda(t_n) \to \rho_\lambda \text{ при } n \to +\infty .$$

Если $\rho_\lambda = +\infty$, то из (8) вытекает $1 \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\ln \lambda) + \left(1 + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\rho_\lambda(t_n)}$,
что невозможно при $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Если $0 \leq \rho_\lambda < +\infty$, то из (8) следует

$$\rho_\lambda \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\{2 + \rho_\lambda \cdot (\ln \lambda)\} + 1 .$$

Устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, находим: $\rho_\lambda \leq 1$. Так как L вида (4) измерима на $[t_0, +\infty)$, то она продолжаема на R^+ до м.м.ф. ▹

Нетрудно видеть, что из теоремы 1 следует теорема И.Караматы. ▹

2^0. Представление (4) можно записать в виде

$$L(t) = \eta(t) \cdot \int_{t_0}^{t} b(x)\, d \ln x , \qquad t \geq t_0 , \tag{4'}$$

где $\eta(t)$ измерима на $[t_0, +\infty)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \eta(t) = 1$.

Л.С.Маергойз выдвинул гипотезу о представлении $(4')$ в случае монотонного $L(t)$, удовлетворяющего условию $\lim\limits_{t \to +\infty} L(t) = +\infty$, и о медленном изменении $b(t)$. Гипотеза с помощью теоремы И.Караматы доказана А.А.Гольдбергом ([2], теорема1) и нашла применение в теории целых функций ([2], теоремы 2 и 3).

Полезность представления (4) мы подтвердим еще на одном примере.

Известно, что в представлении (2) допустим некоторый произвол в выборе $a(t)$ и $b(t)$, что служит инструментом доказательства "тонких" свойств медленного изменения. Напр., в [3] построена "обобщенная" показательная интерполяция L по последовательности значений $\{L(t_n)\}$, позволившая обобщить теорему Д.Д.Адамовича [4].

Это обобщение проще установить с помощью построенной ниже "обобщенной" линейной интерполяции в рамках представления (4). ▹

Теорема 2. Для любого $t_0 > 0$ найдутся удовлетворяющие условиям (3) измеримая на $[t_0, +\infty)$ функция $a(t)$ и непрерывная на $[t_0, +\infty)$ функция $b(t)$, такие, что

$$L(t) = a(t) + L(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(x)\,dx, \qquad t \ge t_0. \tag{9}$$

В теореме 2 класс функций $b(t)$ "у'же" в смысле второго условия (3), чем в теореме 1, хотя есть произвол в выборе числа t_0. С другой стороны, конструкция доказательства теоремы 2 дает широкие возможности в выборе функции $b(t)$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{t_n\}$ такова, что:

а) $0<t_0<t_1<\ldots$, $\lim\limits_{t\to+\infty} L(t) = +\infty$;

б) $\sup\limits_n (t_{n+1} - t_n) < +\infty$, $\inf\limits_n (t_{n+1} - t_n) > 0$.

Рассмотрим последовательность $\{g_n\}$ *непрерывных* функций, для которых

$$\sup_n \sup_{0\le t\le t_{n+1}-t_n} |g_n(t)| < +\infty, \tag{10}$$

$$\delta_{n+1} \cdot g_{n+1}(0) = \delta_n \cdot g_n(t_{n+1} - t_n), \quad n \ge 0, \tag{11}$$

где $\delta_n = \theta_n / (t_{n+1} - t_n)$, $\theta_n = L(t_{n+1}) - L(t_n)$, и последовательность

$$\hat{g}_n(t) = \int_0^t g_n(x)\,dx, \quad t \in [0, t_{n+1} - t_n], \quad n \ge 0,$$

такую, что

$$\hat{g}_n(t) = 0, \quad \hat{g}_n(t_{n+1} - t_n) = t_{n+1} - t_n, \quad n \ge 0. \tag{12}$$

Приведем примеры: $g_n(t) \equiv 1$ и $g_n(t) = \dfrac{6}{(t_{n+1} - t_n)^2} t \cdot \left\{1 - \dfrac{t}{t_{n+1} - t_n}\right\}$, $t \in [0, t_{n+1} - t_n]$, $n \ge 0$.

Интерполяция

$$L_1(t) = L(t_n) + \hat{g}_n(t - t_n) \cdot \delta_n, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad n \ge 0, \tag{13}$$

обобщает линейную интерполяцию: $L_1(t) = L(t_n) + (t - t_n) \cdot \delta_n$.

Условия (12) согласно (13) обеспечивают равенства $L(t_n) = L_1(t_n)$, $n \ge 0$, а условия (11)–(12) – непрерывную дифференцируемость $L_1(t)$ при $t \ge t_0$.

Введем функции

$$a(t) = L(t) - L_1(t), \quad b(t) = g_n(t - t_n) \cdot \delta_n, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad n \ge 0.$$

Покажем справедливость (9). Имеем

$$L(t) = a(t) + L_1(t) = a(t) + L(t_n) + \int_0^{t-t_n} \delta_n \cdot g_n(x)\,dx = \tag{14}$$

$$= a(t) + L_1(t_n) + \int_{t_n}^{t} b(x)\,dx, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad n \ge 0.$$

Далее, из (13) получаем

$$L_1(t_n) = L_1(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} b(x)\,dx = \ldots = L_1(t_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(x)\,dx,$$

что, будучи подставлено в (14), дает (9). Здесь учтено, что согласно (13) и (12) $L_1(t_0) = L(t_0)$.

Покажем, что $\lim\limits_{t\to+\infty}(L_1(t)/L(t)) = 1$.

Равномерная ограниченность $\{g_n(t)\}$ влечет за собой равномерную ограниченность $\{\hat{g}_n(t)/(t_{n+1}-t_n)\}$. По теореме о равномерной сходимости ([1], теорема 1.1) и условию б), для $a(t) = L(t) - L_1(t)$ имеем

$$\frac{a(t)}{L(t)} = 1 - \frac{L(t_n)}{L(t)} - \frac{\hat{g}_n(t-t_n)}{t_{n+1}-t_n}\left\{\frac{L(t_{n+1})}{L(t)} - \frac{L(t_n)}{L(t)}\right\} \to 0 \text{ при } t \in [t_n, t_{n+1}] \text{ и } n \to +\infty,$$

что доказывает утверждение и первое соотношение (3).

Функция $b(t)$ в силу (11) непрерывна на $[t_0, +\infty)$. Более того, по теореме о равномерной сходимости, условию б) и (10),

$$\frac{b(t)}{L(t)} = g_n(t-t_n)\left\{\frac{L(t_{n+1})}{L(t)} - \frac{L(t_n)}{L(t)}\right\}\frac{1}{t_{n+1}-t_n} \to 0 \text{ при } t \in [t_n, t_{n+1}] \text{ и } n \to +\infty,$$

что доказывает второе соотношение (3). ▷

Следствие 1. Интерполяция (13) доказывает обобщение теоремы Д.Д. Адамовича [3], если

$$\hat{g}_n(t) = \varepsilon_0^{-1}(t_{n+1}-t_n)\int_0^{t/(t_{n+1}-t_n)} \exp\left\{-\frac{1}{x(1-x)}\right\}dx, \quad t \in [0, t_{n+1}-t_n], \quad n \ge 0,$$

$$\varepsilon_0 = \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{x(1-x)}\right\}dx. \text{ ▷}$$

Замечание. Пусть для $\{t_n\}$ выполнено условие а), $\sup\limits_n(t_{n+1}/t_n) = M < +\infty$, $\{\hat{g}_n\}$ при каждом $n \ge 0$ не убывает на $t \in [0, t_{n+1}-t_n]$, и верно (12).

Покажем, что $\lim\limits_{t\to+\infty}(L_1(t)/L(t)) = 1$.

В силу (13) и условий на $\{t_n\}$ и $\{\hat{g}_n\}$,

$$(t_n/t) \in [1-M^{-1}, 1], \quad (t_{n+1}/t_n) \in [1, 1+M]$$

и

$$\min\left\{L\left(\frac{t_n}{t}\cdot t\right), L\left(\frac{t_{n+1}}{t}\cdot t\right)\right\} \le L_1(t) \le \max\left\{L\left(\frac{t_n}{t}\cdot t\right), L\left(\frac{t_{n+1}}{t}\cdot t\right)\right\},$$

откуда при всех $t \in [t_n, t_{n+1}]$ и целых $n \ge 0$ следуют неравенства

$$\min_{1-M^{-1}\le x\le 1+M} L(xt)\le L_1(t)\le \max_{1-M^{-1}\le x\le 1+M} L(xt).$$

Делим неравенства на $L(t)$, устремляем $t\to+\infty$ и применяем теорему о равномерной сходимости. ▷

Кафедра теории вероятностей и математической статистики, кафедра теории функций

Поступила 16.11.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141с.
2. **Гольдберг А.А.** Интегральное представление монотонных медленно меняющихся функций.– Изв. вузов. Математика, 1998, N 4, с. 21-27.
3. **Даниелян И.Э., Микаелян Г.В.** Замечания о представлениях медленно меняющихся функций.– Сб.: ГИУЛ. Моделирование, оптимизация, управление, вып. 3, 2000, с. 57-64.
4. **Adamovic D.D.** Sur quelques proprie'te's des fonctions a' croissance lente de Karamata, I, II. – Matematicki Vesnik, 1966, N3, pp.123-136, 161-172.

Ի.Է.ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Գ.Վ.ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ԴԱՆԴԱՂ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՆՈՐ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄ

Ամփոփում

Դանդաղ փոփոխվող $L(t)$ ֆունկցիայի համար ստացված է մի նոր ինտեգրալ ներկայացում՝

$$L(t)=\eta(t)\cdot\int_{t_0}^{t} b(x)\,d\ln x,\qquad t\ge t_0>0,$$

որտեղ $\eta(t)$-ն չափելի է $[t_0,+\infty)$-ում, $b(t)$-ն՝ անընդհատ $[t_0,+\infty)$-ում և

$$\lim_{t\to+\infty}\left(b(t)/L(t)\right)=0:$$

Ներկայացումը թույլ է տալիս ընդհանրացնել Դ.Դ.Ադամովիչի դասական արդյունքը համազոր դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիաների վերաբերյալ և լրացնել Ա.Ա.Գոլդբերգի մի թեորեմի պնդումը:

I.E. DANIELYAN, G.V. MIKAELYAN

A NEW REPRESENTATION OF SLOWLY VARYING FUNCTIONS

Summary

For a slowly varying function $L(t)$ a new integral representation is obtained:

$$L(t)=\eta(t)\cdot\int_{t_0}^{t} b(x)\,d\ln x,\qquad t\ge t_0>0,$$

where $\eta(t)$ is measurable on $[t_0,+\infty)$, $b(t)$ is continuous on $[t_0,+\infty)$, and

$$\lim_{t\to+\infty}\left(b(t)/L(t)\right)=0:$$

This representation allows to generalize D.D.Adamovich's classical result on equivalent slowly varying functions and to extend the statement of A.A. Goldberg theorem.