

С.В. САРКИСЯН, А.С. ПОГОСЯН

О КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследуется задача колебаний трансверсально-изотропной электропроводящей пластинки с учетом поперечных сдвиговых деформаций и индуцированного электромагнитного поля при наличии постоянного продольного магнитного поля.

Рассмотрим колебания пластинки постоянной толщины $2h$ и конечной электропроводности $\hat{\sigma}(\sigma, \sigma, \sigma')$ во внешнем постоянном продольном магнитном поле $\vec{B}(B_1, B_2, 0)$. Пластика в декартовой системе координат xoy расположена так, что срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью xoy , причем плоскость изотропии материала пластинки параллельна срединной плоскости. Магнитная и диэлектрическая проницаемости материала пластинки считаются равными единице, а электромагнитные свойства среды, окружающей пластинку, – эквивалентными свойствами вакуума.

Для сведения трехмерной задачи магнитоупругих колебаний пластинки к двумерной принимаются следующие предположения:

а) гипотеза уточненной теории изгиба пластинки [1], согласно которой

$$u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{J_0}{G'} \Phi(x, y, t), \quad u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{J_0}{G'} \psi(x, y, t), \quad u_3 = w(x, y, t), \quad (1)$$

где $w, u(x, y, t), v(x, y, t)$ – искомые перемещения срединной плоскости пластинки, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения произвольной точки пластинки, Φ и ψ – искомые функции, характеризующие поперечные сдвиговые деформации пластинки, $J_0 = z(h^2 - z^2/3)/2$;

б) линейный закон изменения тангенциальных компонент индуцированного электрического и нормальной компоненты магнитного полей по толщине пластинки [2]:

$$e_1 = \varphi(x, y, t) + z\varphi_1(x, y, t), \quad e_2 = \psi(x, y, t) + z\psi_1(x, y, t), \quad (2)$$

$$h_3 = f(x, y, t) + zf_1(x, y, t).$$

Если в (1) и (2) принять $G' = \infty$, $\varphi_1 = \psi_1 = f_1 = 0$, то получим аналитическую запись гипотезы магнитоупругости тонких тел [3].

Из уравнений электродинамики во внутренней области [3] согласно (1) и (2) будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi + \frac{B_1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + z \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \psi_1 \right), \\
\frac{\partial h_2}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi - \frac{B_2}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + z \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi_1 \right), \\
e_3 &= \frac{c}{4\pi\sigma'} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{1}{c} \left[B_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{J_0}{G'} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \right. \\
&\quad \left. - B_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{J_0}{G'} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right], \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + z \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f_1}{\partial t} \right) &= 0.
\end{aligned} \quad (3)$$

Из первых двух уравнений системы (3) с учетом поверхностных условий [3] для тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля h_1 и h_2 получим

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + z \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi + \frac{B_1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \frac{z^2 - h^2}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \psi_1 \right), \\
h_2 &= \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + z \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi - \frac{B_2}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \frac{z^2 - h^2}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi_1 \right).
\end{aligned} \quad (4)$$

Здесь индексами “ $\pm$ ” обозначены значения соответствующих величин при $z = \pm h$.

Нормальная компонента индуцированного электрического поля определяется из (3) с учетом (4):

$$\begin{aligned}
e_3 &= \frac{c}{8\pi\sigma'} \left[\frac{\partial}{\partial x} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial y} (h_1^+ + h_1^-) \right] - z \frac{\sigma}{\sigma'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{B_2}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{B_1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) - \\
&\quad - \frac{z^2 - h^2}{2} \frac{\sigma}{\sigma'} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) - \frac{1}{c} \left[B_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{J_0}{G'} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \right. \\
&\quad \left. - B_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{J_0}{G'} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right].
\end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, с учетом гипотез (1) и (2) все компоненты индуцированного в пластинке электромагнитного поля с помощью формул (2), (4) и (5) представляются искомыми функциями $u, v, w, \Phi, \Psi, \varphi, \psi, f, \varphi_1, \psi_1, f_1$ и значениями компонент индуцированного магнитного поля h_1 и h_2 на поверхностях пластинки. Согласно (1) для напряжений в пластинке имеем известные представления [1], а для компонент объемных сил электромагнитного происхождения с учетом (1) и (2) получим

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\sigma B_2}{c} \frac{\sigma}{\sigma'} \left[z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{B_2}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{B_1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) + \frac{z^2 - h^2}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c}{8\pi\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial y} (h_1^+ + h_1^-) \right) \right], \\
X_2 &= -\frac{\sigma B_1}{c} \frac{\sigma}{\sigma'} \left[z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{B_2}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{B_1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) + \frac{z^2 - h^2}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c}{8\pi\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial y} (h_1^+ + h_1^-) \right) \right], \quad (6) \\
X_3 &= \frac{\sigma'}{c} \left[B_2 (\varphi + z \varphi_1) - B_1 (\psi + z \psi_1) - \frac{B_1^2 + B_2^2}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right].
\end{aligned}$$

Вводя вместо напряжений статически эквивалентные им внутренние силы и моменты из уравнений движения [1], с учетом (6) получим следующие осредненные по толщине уравнения движения пластинки:

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\sigma B_2}{c} \frac{\sigma}{\sigma'} \left[\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c}{8\pi\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial y} (h_1^+ + h_1^-) \right) \right] - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\
&\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma B_1}{c} \frac{\sigma}{\sigma'} \left[\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c}{8\pi\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial y} (h_1^+ + h_1^-) \right) \right] - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\
&\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\sigma'}{c} \left[B_2 \varphi - B_1 \psi - \frac{B_1^2 + B_2^2}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right] - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\
&\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{2Eh^2}{5G'(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \right) + \Phi - \\
&\quad - \frac{\sigma B_2}{c} \frac{\sigma}{\sigma'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{B_2}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{B_1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) - \rho \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (8) \\
&\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{2Eh^2}{5G'(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \Psi + \\
&\quad + \frac{\sigma B_1}{c} \frac{\sigma}{\sigma'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{B_2}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{B_1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) - \rho \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned}$$

К этим уравнениям присоединим осредненные по толщине пластинки уравнения электродинамики (3):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi + \frac{B_1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{h_1^+ - h_1^-}{2h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi - \frac{B_2}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{h_2^+ - h_2^-}{2h} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

В уравнения (9) входят неизвестные граничные значения тангенциальных компонент магнитного поля, которые должны определяться из уравнений электродинамики во внешней области. Согласно методу сведения трехмерной линейной задачи магнитоупругости пластинки к двумерной [3] будем иметь

$$(h_1^+ + h_1^-) = \frac{2h}{\lambda} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right), \quad (h_2^+ + h_2^-) = \frac{2h}{\lambda} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right), \quad (11)$$

$$(h_1^+ - h_1^-) = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \quad (h_2^+ - h_2^-) = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (12)$$

Здесь $\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, λ — некоторый характерный для данной

задачи линейный размер.

Из оставшихся уравнений электродинамики для области, занимаемой пластинкой, согласно (2) получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial e_3}{\partial y} - \psi_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0, \quad \varphi_1 - \frac{\partial e_3}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

которые должны быть осреднены по толщине пластинки с учетом (4) и (5.)

Таким образом на основе предположений (1) и (2) получена система уравнений (7)–(13), содержащая пятнадцать неизвестных $u, v, w, \Phi, \Psi, \varphi, \psi, f, \varphi_1, \psi_1, f_1, h_i^+ \pm h_i^-$ ($i=1,2$) и образующая полную систему уравнений магнитоупругости конечной проводимости трансверсально-изотропной пластинки во внешнем продольном постоянном магнитном поле. Причем система дифференциальных уравнений (7), (10), (11) и (13) описывает колебания в плоскости пластинки, а система (8), (9) и (12) — поперечные колебания пластинки в продольном магнитном поле.

Совместный учет поперечных сдвиговых деформаций и линейного закона изменения компонент вектора напряженности индуцированного электромагнитного поля по толщине пластинки в задаче колебания пластинки при наличии продольного магнитного поля (в отличие от поперечного магнитного поля) сводит к следующему: влияние поперечных сдвиговых деформаций сказывается на уравнениях, описывающих поперечные колебания пластинки, а линейный закон изменения компонент индуцированного электромагнитного поля присутствует при исследовании колебаний в плоскости пластинки.

Таким образом можно констатировать, что для уточнения задачи поперечных колебаний пластинки в продольном магнитном поле, исследованной на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [3], для перемещений следует брать (1), а в предположении (2) можно ограничиться первыми членами. Если же мы уточняем задачу магнитоупругих колебаний в плоскости пластинки, то в предположениях (1) и (2) следует учитывать поперечные сдвиговые деформации.

Отметим, что задача поперечных колебаний пластинки в продольном магнитном поле с учетом поперечных сдвиговых деформаций исследована в [4,5]. В зависимости от напряженности внешнего магнитного поля основная частота колебания пластинки существенно увеличивается даже при учете поперечных сдвигов. Что же касается частот колебаний, обусловленных учетом сдвиговых деформаций, то они недостаточно сильно реагируют на изменения напряженности магнитного поля.

Следовательно, в зависимости от исследуемых магнитоупругих колебаний пластинки гипотезу магнитоупругости тонких тел следует уточнять в том или ином направлении.

Кафедра механики сплошной среды

Поступила 30.06.2000

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987, 360 с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит, 1996, 288 с.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977, 272 с.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1991, 144 с.
5. Саркисян С.В. Динамические задачи электропроводящих пластин в сильных магнитных полях. – Дисс. на соискание уч. ст. доктора физ.-мат. наук. Ер., 1997.

Ս.Վ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ա.Ս. ՊՈԳՈՍՅԱՆ

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ
ԷԼԵԿՏՐՈԿՈՆՍԴԱԿՏԻՎ ՍԱԼԻ ՏՄՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են էլեկտրահաղորդիչ սալի տատանումները երկայնական մագնիսական դաշտում: Հաշվի են առնված լայնական սահքի դեֆորմացիաներն ու ինդուկտված էլեկտրամագնիսական դաշտի ռադադրիչների գծային փոփոխման օրենքը ըստ սալի հաստություն:

S.V. SARKISYAN, A.S. POGHOSYAN

ON VIBRATIONS OF ELECTROCONDUCTIVE PLATE IN LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

Summary

The problem of vibrations of transversal-isotropic electroconductive plate in view of transversal shear strains and induced electromagnetic field at presence of constant longitudinal magnetic field is investigated.