Բնական գիտություններ 1,2001 Естественные науки

Физика

УДК 524.83

Г.Г. АРУТЮНЯН

ЭЙНШТЕЙНОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕНЗОРНО-СКАЛЯРНЫХ ТЕОРИЙ ГРАВИТАЦИИ

В работе представлены соображения, связанные с конформными преобразованиями теории Йордана – Дикке – Бранса. Показано, что при определенных условиях тензорно-скалярные теории гравитации конформно эквивалентны теории Эйнштейна с источником в виде минимально связанного скалярного поля.

В скалярно-тензорных теориях (СТТ) в отличие от общей теории относительности (ОТО) используется для описания гравитационного поля не только метрический тензор пространства-времени, но также и потенциал скалярного поля (в дальнейшем будем называть его гравитационным). В последние годы появилось значительное количество публикаций, так или иначе связанных с СТТ. Возобновление интереса к СТТ обусловлено по меньшей мере тремя обстоятельствами:

- установлено, что современные суперструнные теории в низкоэнергетическом пределе приводят к СТТ;
- космологическая эволюция требует инфляционной стадии, для перехода которой к следующей фазе в ОТО необходима тонкая подстройка космологических параметров, в то время как наличие гравитационного скаляра в СТТ позволяет осуществить смену фаз эволюции плавно без какой-либо подстройки;
- в отличие от ОТО СТТ предсказывают гравитационное излучение монопольного (от сферических объектов) и дипольного (в двойных системах) характера, что в связи с проектом по запуску обсерватории на лазерных интерферометрах по обнаружению гравитационных волн позволит тестировать СТТ, что и вызвало новую волну исследований нестационарных явлений в этих теориях.

Эксперименты в пределах солнечной системы дают для отношения константы связи вещество – скалярное поле к константе связи вещество – метрика малую величину в $(<10^{-3})$, что практически можно расценить как граничащую с отсутствием малость скалярного поля. Однако есть основания полагать, что скалярное поле играло существенную роль в ранней Вселенной и различие между предсказаниями СТТ и ОТО было велико, но в ходе эволюции Вселенной интенсивность этого поля уменьшалась до сегодняшнего значения. В настоящую эпоху, в постньютоновском приближении влияние скалярного поля сравнительно мало, но может оказаться заметным в сильных гравитационных полях (черные дыры, сингулярности, гравитационные волны).

Наиболее физически содержательной и полно разработанной версией СТТ является теория Йордана – Бранса – Дикке (ЙБД). Рассматривая трансформационные свойства метрического тензора в пятимерной теории Калуцы – Клейна, Йордан обнаружил, что, вопреки предположению Калуцы о постоянстве g_{55}, эта компонента – типичный скаляр. Считая этот скаляр в данной пространственно-временной точке пропорциональным константе тяготения, другими словами, предположив, что скаляр g_{55} заменяет эту константу, Йордан сформулировал теорию тяготения [1], отличную от ОТО, реализовав при этом гипотезу Дирака о вариации константы гравитационного взаимодействия ("дряхлеющая гравитация"). В теории ЙБД гравитационный скаляр порождается веществом и негравитационными полями, а точнее подчиняется уравнению типа волнового с источником в виде следа тензора энергии-импульса вещества и негравитационных полей. Влияние скалярного поля на движение частиц проявляется не за счет непосредственного взаимодействия, а благодаря обусловленным этим полем изменениям метрического тензора. При этом, как и в ОТО, ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса вещества и негравитационных полей обращается в нуль, обеспечивая тем самым согласие с требованием слабого принципа эквивалентности: пробные незаряженные бесспиновые частицы и лучи света движутся по геодезическим.

Спустя несколько лет, основываясь на эвристической идее Маха о влиянии удаленных масс на происхождение инерции, Дикке и Бранс [2] сформулировали теорию тяготения, физическая интерпретация которой отличается от йордановской, но полевые уравнения совпадают.

В работе рассматриваются различные видоизменения теории ЙБД, возникающие при конформных преобразованиях метрики.

Пусть в одном и том же многообразии заданы два конформно-соответствующих пространства V_4 и $\overline{V_4}$, наделенных римановой структурой

$$d\bar{s}^2 = \sigma^2(x)d\bar{s}^2 = \sigma^2(x)\cdot g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,\ \bar{g}_{\mu\nu} = \sigma^2(x)\cdot g_{\mu\nu},\ \bar{g}^{\mu\nu} = \sigma^{-2}(x)\cdot g^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Помимо известного математического содержания, конформным преобразованиям (1) можно попытаться придать физический смысл, связывая их с масштабными преобразованиями единиц измерения физических величин. Будем исходить из естественного предположения об инвариантности при этих преобразованиях универсальных фундаментальных физических констант – скорости света c и постоянной Планка $\hbar$:

$$\bar{c} = c, \quad \bar{\hbar} = \hbar. \quad (2)$$

Примем также, что те 1-формы, в определении которых никак не фигурирует метрический тензор, неизменны при преобразованиях (1). В частности к таким величинам относится потенциал электромагнитного поля $A_\mu = \bar{A}_\mu$ (но $\bar{A}^\mu = \bar{g}^{\mu\nu}\cdot\bar{A}_\nu = (\sigma)^{-2}A^\mu$). С другой стороны, в качестве альтернативного примера рассмотрим, как изменяются компоненты вектора 4-скорости:

$$u^\mu = dx^\mu / ds = dx^\mu / (\sigma^{-1}d\bar{s}) = \sigma\bar{u}^\mu,\ u_\mu = g_{\mu\nu}\cdot u^\nu = \sigma^{-1}\bar{u}_\mu.$$

(Как и должно было быть, связь $u^\mu \cdot u_\mu = 1$ приводит к аналогичной в пространстве $\overline{V_4}$: $\overline{u}^{\mu}\cdot\overline{u}_{\mu}=1$). Основываясь на (2), легко можно установить связь физических величин в новых и старых единицах измерения, в частности для расстояний $\overline{l}=\sigma\cdot l$, времени $\overline{t}=\sigma\cdot t$, массы $\overline{m}=\sigma^{-1}\cdot m$, плотности энергии $\overline{e}=\sigma^{-4}\cdot e$ и т.п.

Уместно заметить, что постоянство скорости света c , A_{μ} так же, как и неизменность электрического заряда при преобразованиях (1) $e=\overline{e}$, можно рассматривать как следствие известного факта о конформной инвариантности электродинамики.

Допустим, что метрический тензор пространства V_4 подчиняется уравнениям тензорно-скалярной теории гравитации, которые получаются в результате варьирования действия

$$S=\int\left[-F(\phi)R+\Phi(\phi)g^{\mu\nu}\phi_{\mu}\phi_{\nu}/2+L_m\right](-g)^{1/2}d^4x \tag{3}$$

(здесь L_m – плотность функции Лагранжа вещества и негравитационных полей, ϕ – гравитационный скаляр, а $(\ldots)_{\alpha}=\partial(\ldots)/\partial x^{\alpha}$). Перейдем в конформно соответствующее пространство $\overline{V}_4$ согласно

$$\overline{g}_{\mu\nu}=\left(F(\phi)/F_0\right)\cdot g_{\mu\nu}\ ,\quad F_0=const\ .$$

Тогда для действия (3) получаем

$$\overline{S}=\int\left[-F_0\cdot\overline{R}+\overline{g}^{\mu\nu}\cdot\psi_{\mu}\psi_{\nu}/2+\overline{L}_m\right]\left(-\overline{g}\right)^{1/2}d^4x\,, \tag{4}$$

где

$$\psi_{\alpha}=\phi_{\alpha}\left(3F_0\dot{F}^2/F^2+F_0\Phi/F\right)^{1/2},\qquad \dot{F}\equiv\partial F/\partial\phi\,.$$

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\overline{G}_{\alpha\beta}=1/2F_0\left(\overline{T}^{m}_{\alpha\beta}+\overline{T}^{s}_{\alpha\beta}\right),\ \overline{g}^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\psi_{\beta}=0\,,\ \overline{T}^{s}_{\alpha\beta}=\psi_{\alpha}\psi_{\beta}-\overline{g}_{\alpha\beta}\overline{g}^{\mu\nu}\psi_{\mu}\psi_{\nu}/2\,.$$

Если выбрать $F_0=1/2k_0=c^4/16G$, то вид действия в пространстве совпадает с действием ОТО с минимально связанным скалярным полем ψ, удовлетворяющим однородному волновому уравнению, что позволяет сформулировать

• **Предложение 1.** Тензорно-скалярные теории гравитации (3) в пространстве с метрическим тензором $\overline{g}_{\mu\nu}=\left(F(\phi)/F_0\right)\cdot g_{\mu\nu}$ конформно эквивалентны ОТО с источником в виде минимально связанного скалярного поля.

Предположим далее, что метрический тензор $g_{\mu\nu}(x)$ пространства V_4 подчиняется уравнениям теории ЙБД:

$$G^{\mu}_{\nu}=8\pi T^{\mu}_{\nu}/y+\nabla_{\nu}y^{\mu}/y+\zeta y_{\nu}y^{\mu}/y^2-\delta^{\mu}_{\nu}\left(\nabla_{\alpha}y^{\alpha}/y+\zeta y_{\alpha}y^{\alpha}/2y^2\right), \tag{5}$$

$$\nabla_{\alpha}y^{\alpha}=8\pi T/(3+2\zeta) \tag{6}$$

или в эквивалентной форме

$$R^{\mu}_{\nu}=8\pi/y\left(T^{\mu}_{\nu}-\delta^{\mu}_{\nu}(1+\zeta)T/(3+2\zeta)\right)+\nabla_{\nu}y^{\mu}/y+\zeta y_{\nu}y^{\mu}/y^2\,,$$

$$R=-16\pi\zeta T/y(3+2\zeta)+\zeta y_{\alpha}y^{\alpha}/y^2\,.$$

Здесь ζ – безразмерная константа связи теории ЙБД, ∇_α обозначает ковариантную производную по x^α .

Гравитационный скаляр $y = y(x)$ принято нормировать так, чтобы асимптотически в слабых гравитационных полях

$$y(x) \to y_0 = 2(2+\zeta)/G(3+2\zeta) \ . \qquad (7)$$

Уравнения (5) и (6) можно получить варьированием действия

$$W = \int\left[-y(16\pi)^{-1}\left(R - \zeta y^\mu y_\mu / y^2\right) + L_m\right](-y)^{1/2} d^4x \qquad (8)$$

по $g_{\mu\nu}$ и $y(x)$. Легко заметить, что действие (8) превращается в действие Гильберта – Эйнштейна при $y = y_0$ и $\zeta \to \infty$ и является частным случаем (3), если положить $F = y/16\pi$, $\Phi = \zeta y/8\pi$, $F_0 = y_0/16\pi = 1/2k$.

Перейдем в конформно соответствующее пространство $\widetilde{V}_4$, метрический тензор которого

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} = (y/y_0)^k g_{\mu\nu} . \qquad (9)$$

При этом

$$\widetilde{W} = \int\left[-(y/y_0)^{1-k}(2k)^{-1}\left(\widetilde{R} - (A/2)\widetilde{g}^{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta / y^2\right) + \widetilde{L}_m\right](-\widetilde{g})^{1/2} d^4x . \qquad (10)$$

Здесь введено обозначение

$$A = (3+2\zeta) - 3(1-k)^2 , \ k = 1 \pm \left[(3+2\zeta - A)/3\right]^{1/2} . \qquad (11)$$

Варьирование (10) по $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ и y приводит к уравнениям

$$\widetilde{G}^\alpha_\beta = k(y/y_0)^{k-1}\widetilde{T}^\alpha_\beta + (A/2 - k(1-k))y_\beta y^{\tilde{\alpha}}/y^2 +$$
$$+ (k(1-k) - A/4)\left(\delta^\alpha_\beta / y^2\right) y_\mu y^{\tilde{\mu}} + ((1-k)/y)\left[\widetilde{\nabla}_\beta y^{\tilde{\alpha}} - \delta^\alpha_\beta \widetilde{\nabla}_\mu y^{\tilde{\mu}}\right], \qquad (12)$$

$$(1-k)\widetilde{R} - A(1+k)y_\alpha y^{\tilde{\alpha}}/2y^2 + A\widetilde{\nabla}_\alpha y^{\tilde{\alpha}}/y = 0 . \qquad (13)$$

Комбинируя свертку уравнения (12)

$$-\widetilde{R} = k(y/y_0)^{k-1}\widetilde{T} - (A/2 - 3k(1-k))y_\alpha y^{\tilde{\alpha}}/y^2 - 3(1-k)\widetilde{\nabla}_\alpha y^{\tilde{\alpha}}/y \qquad (14)$$

с (13), получим уравнение, определяющее гравитационный скаляр

$$\widetilde{\Delta}_\alpha y^{\tilde{\alpha}}/y - k y^{\tilde{\alpha}} y_\alpha / y^2 = k(1-k)(y/y_0)^{k-1}\widetilde{T}/(3+2\zeta) . \qquad (15)$$

Таким образом, в результате конформных преобразований (9) полевые уравнения (5) и (6) в пространстве V_4 превращаются в (12) и (15).

• **Замечание 1**. Переопределим гравитационный скаляр теории ЙБД так, чтобы

$$\widetilde{y}/y_0 = (y/y_0)^{1-k} , \qquad (16)$$

и введем новую безразмерную константу связи

$$\widetilde{\zeta} = A/2(1-k)^2 = -3/2 + (3+2\zeta)/2(1-k)^2 , \qquad (17)$$

тогда действие (10) принимает вид

$$\widetilde{W} = \int\left[-\widetilde{y}(16\pi)^{-1}\left(\widetilde{R} - \widetilde{\zeta}\widetilde{y}^\mu \widetilde{y}_\mu \widetilde{y}^{-2}\right) + (\widetilde{y}/y_0)^{1-k^2} L_m\right](-\widetilde{g})^{1/2} d^4x . \qquad (18)$$

Для переобозначенной $\widetilde{\zeta}$ понижается оценка согласующегося с экспе-

риментами значения ($\tilde{\zeta}>125$, а для ζ эксперименты приводят к $\zeta>500$).
Содержание замечания 1 доказывает

• **Предложение 2.** Уравнения теории ЙБД инвариантны относительно конформных преобразований (9) для любых $k\neq 1$, если переопределить гравитационный скаляр и переобозначить константу связи согласно (16) и (17) (при $k=2$, $\tilde{\zeta}=\zeta$).

Рассмотрим действие (10) для частного значения показателя степени конформного преобразования (9) $k=1$ $(A=3+2\zeta)$. Введем новое обозначение

$$\phi_\alpha=\left[(3+2\zeta)y_0/16\pi\right]^{1/2}y_\alpha/y \tag{19}$$

и перепишем действие (10) в виде

$$\tilde{W}=\int\left[-\tilde{R}/2k+(1/2)\tilde{g}^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta+\tilde{L}_m\right](-\tilde{g})^{1/2}d^4x. \tag{20}$$

Здесь по-прежнему

$$2k=16\pi/y_0=8\pi G(3+2\zeta)/(2+\zeta). \tag{21}$$

Рассматриваемый случай есть частный случай (4), и действие (20) формально совпадает с видом действия Эйнштейна – Гильберта с минимально связанным скалярным полем $\phi(x)$[3]. Действию (20) соответствуют уравнения

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}=k\left(T^m_{\alpha\beta}+\phi_\alpha\phi_\beta-1/2g_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu\right), \tag{22}$$

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\phi_\beta=0. \tag{23}$$

Отметим, что

• уравнение (23) является следствием ковариантного постоянства $\tilde{G}_{\alpha\beta}$,

• константа тяготения перенормирована согласно (21).

Таким образом, можно считать доказанным

• **Предложение 3.** Уравнения теории ЙБД в результате конформного преобразования (9) с $k=1$ превращаются в уравнения ОТО с переобозначенной константой тяготения и источником в виде суммы тензоров энергии-импульса вещества и негравитационных полей и минимально связанного скалярного поля.

Используя результат Бекенштейна [4], перейдем в другое пространство $\breve{V}_4$, конформное соответствие которого с исходным V_4 устанавливается согласно

$$\breve{g}_{\mu\nu}=1/4(y/y_0)^{n+1}\left[1+(y/y_0)^{-n}\right]^2g_{\mu\nu}, \tag{24}$$

$$\psi=\left(6/\tilde{k}\right)\left((y/y_0)^n-1\right)/\left((y/y_0)^n+1\right);\ n=\left[(3+2\zeta)/3\right]^{1\ 2}. \tag{25}$$

Тогда (8) преобразуется в

$$\breve{W}=\int\left[-\breve{R}\left(1-k\psi^2/6\right)/2k+(1/2)\breve{g}^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta+\breve{L}_m\right](-\breve{g})^{1/2}d^4x, \tag{26}$$

что доказывает

• **Предложение 4.** Уравнения теории ЙБД конформным преобразованием (24) приводятся к уравнениям ОТО с источником в виде негравитационных полей и конформно связанного безмассового скалярного поля ψ, удовлетворяющего уравнению Пенроуза – Черникова – Тагирова:

$$\breve{g}^{\alpha\beta}\breve{\nabla}_\alpha\psi_\beta-\left(\breve{R}\psi/6\right)=0\,. \tag{27}$$

• **Замечание 2.** Отбросим в действии (26) слагаемое $\left(-\breve{R}/2k\right)$ и добавим хиггсовский потенциал ($\lambda\psi^4/12$). Полученное в результате выражение

$$\breve{W}=\int\left[\breve{R}\psi^2/12+(1/2)\breve{g}^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta-\lambda\psi^4/12+\breve{L}_m\right](-\breve{g})^{1/2}d^4x \tag{28}$$

преобразуем конформно, подобрав конформный фактор так, чтобы в результате потенциал скалярного поля обратился в константу, а "кинетический" член поглотился добавками, обусловленными конформным фактором. Этим условиям удовлетворяет преобразование (аналогичное рассматривалось в [4])

$$\hat{\psi}=\psi/\chi=e=const\,;\;\psi=e\chi\,; \tag{29}$$

$$\hat{g}_{\alpha\beta}=\chi^2 g_{\alpha\beta}\,.$$

Введем далее

$$\hat{k}=-6/e^2\,,\;\;\Lambda=\lambda e^2/2\,,$$

тогда

$$\hat{W}=\int\left[-\left(\hat{R}+2\Lambda\right)/2\hat{k}+\hat{L}_m\right](-\hat{g})^{1/2}d^4x\,. \tag{30}$$

Кафедра теоретической физики *Поступила 06.07.2000*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Jordan P.** Scwerkraft und Weltall. Braunscweig, 1955.
2. **Brans., Dicke R.** – Phis.rev., 1961, 124, N 3, p.925-935.
3. **Шикин Г.Н.** Основы теории солитонов в общей теории относительности, М.: УРСС,1995.
4. **Bekenshtein J.D.** – Phys.Rev., 1972, D5, c. 1239, c. 2403.
5. **Мельников В.Н.** Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, М.: Энергоатомиздат, 1980, в.11.

Գ.Հ.ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԳՐԱՎԻՏԱՑԻԱՅԻ ՏԵՆԶՈՐԱ-ՍԿԱԼՅԱՐ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԷՅՆՇՏԵՅՆՅԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում քննարկված են Յորդան-Դիկե-Բրանսի տեսության կոնֆորմ ձևափոխությունների հնարավորությունները : Ցույց է տրված, որ որոշակի դեպքում գրավիտացիայի տենզորա-սկալյար տեսությունները համարժեք են Էյնշտեյնի տեսությանը՝ մինիմալ կապված սկալյար դաշտի առկայությամբ:

G. H. HAROUTYUNIAN

EINSTEIN REPRESENTATION OF TENSOR-SCALAR THEORIES OF GRAVITATION

Summary

In this paper considerations on conformal transformations of tensor-scalar theory are represented. It is shown that under certain conditions conformal transformed theory of Jordan – Brans – Dicke is equivalent to Einstein theory with a minimally bounded scalar field source.