УДК 517.51

М. Г. ГРИГОРЯН, А. С. САРКИСЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЕСОВОГО КЛАССА $L_\mu^q[-1,1]$ РЯДАМИ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЛЕЖАНДРА

В работе рассматривается вопрос о представлении функций весового пространства $L_\mu^q[-1,1]$ $q \ge 1$ рядами по многочленам Лежандра в смысле сходимости по норме $L_\mu^q[-1,1]$, $q \ge 1$.

Вопросам представления измеримых функций тригонометрическими и общими ортогональными рядами в смысле сходимости *почти всюду и по мере* посвящено много работ, напр., обзорные статьи А.А. Талаляна [1], П.Л. Ульянова [2]. Полард (3), Нейман и Рудин [4] доказали, что функции $f(x) \in L^q[-1,1]$ разлагаются в сходящиеся в L^q ряды Фурье по многочленам Лежандра только для $q \in \left(\frac{4}{3}, 4\right)$. Следовательно, не все функции пространства $L^q[-1,1]$, $q \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \cup [4, +\infty)$, можно представить рядом по многочленам Лежандра в метрике $L^q[-1,1]$, $q \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \cup [4, +\infty)$.

Естественен вопрос: существует ли весовая функция $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \le 1$ при $x \in [-1,1]$, такая, что для каждого $q \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \cup [4, +\infty)$ и для всякой функции $f(x) \in L_\mu^q[-1,1] = \left\{ f(x);\ \int_{-1}^{1} |f(x)|^q \mu(x) dx < \infty \right\}$ можно найти ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$ по многочленам Лежандра, который сходится к $f(x)$ в метрике $L_\mu^q[-1,1]$?

Оказывается, что поставленный вопрос имеет положительный ответ.

Теорема. Пусть $\{P_n(x)\}$ – многочлены Лежандра и $\varepsilon > 0$. Тогда существует измеримая функция $\mu(x)$; $|\{x; \mu(x) \ne 1\}| < \varepsilon$, такая, что для всякого $q \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \cup [4, +\infty)$ и для любой функции $f(x) \in L^q_\mu[-1,1]$ существует ряд по многочленам Лежандра

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x),$$

который сходится к $f(x)$ в метрике $L^q_\mu[-1,1]$, т.е.

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=1}^{N} a_k P_k(x) - f(x) \right|^q \mu(x) dx = 0.$$

Добавим, что ряд $\sum^{\infty} a_k P_k(x)$ также сходится к $f(x)$ и почти всюду на [-1,1].

Схема доказательства этой теоремы такова: с применением подобных рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 2 работы [5], строится весовая функция $\mu(x)$ такая, что для каждой функции $f(x) \in L^q_\mu$ при $q \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \cup [4, +\infty)$ (по индукции) можно было выбрать попарно непересекающиеся полиномы по многочленам Лежандра

$$Q_k(x) = \sum_{i=N_{k-1}}^{N_k - 1} a_i P_i(x), \quad 0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_k <,$$

удовлетворяющие условиям

$$\int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=1}^{n} Q_k(x) - f(x) \right|^q \mu(x) dx < 2^{-n}, \ n \geq 1,$$

$$\max_{N_{k-1} \leq m < N_k} \int_{-1}^{1} \left| \sum_{i=N_{k-1}}^{m} a_i P_i(x) \right|^q \mu(x) dx < 2^{-k}, \ k \geq 1.$$

Определяя ряд следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=N_{k-1}}^{N_k - 1} a_i P_i(x) \right),$$

сразу получаем, что он сходится к $f(x)$ в метрике $L^q_\mu[-1,1]$.

В заключение мы хотим сформулировать следующий вопрос. Какие необходимые и достаточные условия нужно наложить на весовую функцию $\mu(x)$, чтобы каждая функция $f(x) \in L^q_\mu[-1,1]$ при $q \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \cup [4, +\infty)$ представлялась рядом по многочленам Лежандра в смысле сходимости по норме $L^q_\mu[-1,1]$?

Поступило 03.11.1999

Кафедра высшей математики
физического факультета

ЛИТЕРАТУРА

1. **Талалян А.А.** Представление измеримых функций рядами. – Успехи мат. наук, 1969, т. 15, в. 5, с. 77–141.
2. **Ульянов П.Л.** Представление функций рядами и классы L^p. – Успехи мат. наук, 1972, т. 27, в. 2, с. 3–52.
3. **Pollard H.** The mean convergence of orthogonal series. – Duke Math. J., 1949, v. 16, N1, p. 189–191.
4. **Newman J., Rudin W.** Mean convergence of orthogonal series. – Proc. Amer. Math. Soc., 1952, N3, p. 219–222.
5. **Grigorian M.G.** On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces. – Studia Math., 1999, v. 134 (3), p. 207–216.

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

$L^q_\mu[-1,1]$ ԿՇՌԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ԸՍՏ ԼԵԺԱՆԴՐԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ

Ամփոփում

Հոդվածում կառուցվում է կշռային $L^q_\mu[-1,1]$ տարածություն $\left(q\in\left[1,\frac{4}{3}\right]\cup[4,+\infty)\right)$, որի համար Լեժանդրի բազմանդամները հանդիսանում են ներկայացման համակարգ.

M. G. GRIGORIAN, A. S. SARGSYAN

ON THE REPRESENTATION OF FUNCTIONS BY SERIES OF LEGANDRE POLYNOMIALS IN WEIGHTED $L^q_\mu[-1,1]$ SPACES

Summary

In this paper we construct the weighted $L^q[-1,1]$, $q\in\left[1,\frac{4}{3}\right]\cup[4,+\infty)$ spaces and Legander series $\sum_{k=1}^{\infty} c_p P_k(x)$, which is universal in $L^q[-1,1]$.