

Математика

УДК 518.519

И.Э. ДАНИЕЛЯН

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕДЛЕННО
МЕНЯЮЩИХСЯ ФУНКЦИЙ

Пусть $0 < t_0 < t_1 < \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, $\sup_n (t_{n+1} - t_n) < +\infty$.

Для выпуклой (кверху) медленно меняющейся функции $L(t) > 0$ построена эквивалентная ей выпуклая, бесконечно дифференцируемая медленно меняющаяся функция $L_1(t)$, которая совпадает с $L(t) > 0$ на предварительно заданной числовой последовательности.

1°. Измеримая на $R^+ = (0, +\infty)$ функция $L(t) > 0$ медленно меняется на бесконечности, если $\lim_{t \rightarrow +\infty} (L(x \cdot t)/L(t)) = 1$ для любого $x > 0$.

Медленно меняющиеся функции (м.м.ф.) $L(t)$ и $L_1(t)$ эквивалентны на бесконечности (пишем $L_1(t) \approx L(t)$, $t \rightarrow +\infty$), если $\lim_{t \rightarrow +\infty} (L_1(t)/L(t)) = 1$.

В теории м.м.ф. актуальна следующая

Задача. Для м.м.ф. $L(t)$ найти м.м.ф. $L_1(t) \approx L(t)$, $t \rightarrow +\infty$, с заранее заданными “хорошими” свойствами.

К “хорошим” свойствам относятся, напр., бесконечная дифференцируемость, монотонность, вогнутость, $L(t_n) = L_1(t_n)$ для заданной последовательности $\{t_n\}$, где $0 < t_0 < t_1 < \dots$, и $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$.

Так, в [1] и [2] строятся бесконечно дифференцируемые $L_1(t) \approx L(t)$, $t \rightarrow +\infty$, в случае последовательностей $t_n = n$ и $t_n = e^n$, $n \geq 1$, соответственно. $L_1(t)$ в [1] сохраняет монотонность на бесконечности, а в [2] – монотонность и вогнутость на бесконечности. Случай произвольной последовательности $\{t_n\}$ с сохранением монотонности рассмотрен в [3].

В настоящей заметке установлена следующая

Теорема. Для вогнутой м.м.ф. $L(t)$ существует бесконечно дифференцируемая вогнутая м.м.ф. $L_1(t) \approx L(t)$, $t \rightarrow +\infty$, такая, что при заранее заданной последовательности $\{t_n\}$: $0 < t_0 < t_1 < \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, выполнено $L(t_n) = L_1(t_n)$, $n \geq 0$.

Отметим, что вогнутая м.м.ф. $L(t)$ не убывает. Если $L(u_1) = L(u_2)$ при $u_2 > u_1 > 0$, то $L(u) = L(u_1)$ при $u > u_1$. Если $L(u_1) < L(u_2)$ при $u_2 > u_1 > 0$, то $L(u_1) < L(u) < L(u_2)$ при $u \in (u_1, u_2)$. Следовательно, теорему достаточно доказать

для возрастающей вогнутой м.м.ф. $L(t)$.

Идея доказательства теоремы заключается в использовании следующей конструкции интерполяции $L(t)$, предложенной в [3].

Пусть $\{\hat{g}_n(t)\}$ – последовательность функций на R^+ вида

$$\hat{g}_n(t) = \int_0^t g_n(x) dx, \quad t \in [0, t_{n+1} - t_n], \quad n \geq 0,$$

удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned} g_n(t) &\text{ непрерывны на } R^+, \\ \sup_n \sup_{0 \leq t \leq t_{n+1} - t_n} |g_n(t)| &< +\infty, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\delta_{n+1} \cdot g_{n+1}(0) = \delta_n \cdot g_n(t_{n+1} - t_n), \quad (2)$$

$$\hat{g}_n(0) = 0, \quad \hat{g}_n(t_{n+1} - t_n) = t_{n+1} - t_n, \quad (3)$$

где $\delta_n = \theta_n / (t_{n+1} - t_n)$, $\theta_n = L(t_{n+1}) - L(t_n)$.

Здесь $\{t_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы и $\sup_n (t_{n+1} - t_n) < +\infty$.

Последнее условие достигается добавлением новых точек.

Тогда функция

$$L_1(t) = L(t_n) + \hat{g}_n(t - t_n) \cdot \delta_n, \quad t \in [0, t_{n+1} - t_n], \quad n \geq 0, \quad (4)$$

осуществляет “обобщенную” линейную интерполяцию $L(t)$.

В [3] показано, что $L_1(t)$ – м.м.ф., непрерывная на $[t_0, +\infty)$, $L_1(t) = L(t)$, $t \rightarrow +\infty$ и $L(t_n) = L_1(t_n)$, $n \geq 0$.

При возрастающей вогнутой $L(t)$ мы построим последовательность $\{\hat{g}_n(t)\}$, удовлетворяющую (1)–(3), такую, что м.м.ф. $L_1(t)$, определяемая формулой (4), будет удовлетворять условиям теоремы. >

2°. *Лемма 1.* Существует бесконечно дифференцируемая на $R^1 = (-\infty, +\infty)$ функция $f(t)$ такая, что $f(t) = 1$ при $t \leq 0$, $f(t) = 0$ при $t \geq 1$, $f(t)$ убывает на $[0, 1]$, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$ при всех $k \geq 1$, и для заданного $\delta \in (0, 1)$

$$\int_0^1 f(t) dt = \delta.$$

Здесь $f^{(k)}(t)$ – k -тая производная функции $f(t)$.

Доказательство. Функция (ср. с [4], гл.3, зад.12, с.54)

$$\varphi(t) = \varphi_\tau(t) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\tau/t\right)\exp\left\{-\frac{1}{1-t}\right\}\right\}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{если } t \leq 0, \\ 1, & \text{если } t \geq 1, \end{cases} \quad \tau > 0, \quad (5)$$

возрастает на $[0, 1]$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется число τ_1 (число τ_2) такое, что

$$\int_0^1 \varphi_{\tau_1}(t) dt > 1 - \varepsilon \quad \left(\int_0^1 \varphi_{\tau_2}(t) dt < \varepsilon \right).$$

Действительно, φ_{τ_1} (φ_{τ_2}) стремится к 0 (1) при $\tau_1 \rightarrow 0$ (при $\tau_2 \rightarrow +\infty$) равномерно по $t \in [(\varepsilon/(1+\varepsilon)), 1]$ (по $t \in [0, 1 - (\varepsilon/2)]$). Следовательно, найдется $\tau_0 > 0$ такое, что $\varphi_{\tau_1}(t) > 1 - \varepsilon^2$ при $0 < \tau_1 < \tau_0$ и $t \in [(\varepsilon/(1+\varepsilon)), 1]$ ($\varphi_{\tau_2}(t) < \varepsilon/(2-\varepsilon)$ при $\tau_2 > \tau_0$ и $t \in [0, 1 - (\varepsilon/2)]$ и одновременно $\int_{1-(\varepsilon/2)}^1 \varphi_{\tau_2}(t) dt < \varepsilon/2$ равномерно по $\tau_2 \in (0, +\infty)$).

Поэтому $\int_0^1 \varphi_{\tau_1}(t) dt > 1 - \varepsilon$ при $\tau_1 \in (0, \tau_0)$ ($\int_0^1 \varphi_{\tau_2}(t) dt < \varepsilon$ при $\tau_2 > \tau_0$).

Итак, существуют функции $\bar{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ типа (5) такие, что

$$\bar{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \bar{\varphi}(t) dt \geq 1 - \delta \geq \int_0^1 \underline{\varphi}(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lambda}.$$

Следовательно, $1 - \delta = p \cdot \underline{\lambda} + (1 - p) \cdot \bar{\lambda}$ при некотором $p \in [0, 1]$. Тогда функция $f(t) = 1 - p \cdot \underline{\varphi}(t) - (1 - p) \cdot \bar{\varphi}(t)$, $t \in R^1$ удовлетворяет условиям леммы 1. $\triangleright$

В [5] (сс. 5–6 и 48–53) изложен общий способ построения бесконечно дифференцируемой на R^1 функции φ такой, что $\varphi^{(n)}(t_n) = a_n$, $n \geq 1$, где $\{t_n\}$ и $\{a_n\}$ – заданные последовательности вещественных чисел. $\triangleright$

1. В связи с леммой 1 приведем примеры.

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \varepsilon_0^{-1} \cdot \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{x \cdot (1-x)}\right\} dx, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{если } t \leq 0, \\ 1, & \text{если } t \geq 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon_0 = \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{x \cdot (1-x)}\right\} dx$ удовлетворяет условиям леммы 1 с $\delta = 1/2$.

$$\begin{aligned} \text{Действительно, } 1 - \delta &= \varepsilon_0^{-1} \int_0^1 dt \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{x \cdot (1-x)}\right\} dx = \\ &= \varepsilon_0^{-1} \cdot \int_0^1 (1-x) \exp\left\{-\frac{1}{x \cdot (1-x)}\right\} dx. \end{aligned}$$

Замена переменной интегрирования $1 - x = y$ дает

$$1 - \delta = \varepsilon_0^{-1} \cdot \int_0^1 x \cdot \exp\left\{-\frac{1}{x \cdot (1-x)}\right\} dx.$$

Складывая равенства, получаем

$$2 \cdot (1 - \delta) = \varepsilon_0^{-1} \cdot \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{x \cdot (1-x)}\right\} dx = 1,$$

откуда следует $\delta = 1/2$. $\triangleright$

2. Пусть $e_k(x)$ – k -кратная функциональная итерация e^x , т.е. $e_1(x) = e^x$, $e_{k+1}(x) = e_k(e^x)$, $k \geq 1$. Для удовлетворяющей условиям леммы 1 последовательности функций

$$f(k, t) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-t^{-1} \cdot \exp\left\{-e_k\left(\frac{1}{1-t}\right)\right\}\right\}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{если } t \leq 0, \\ 0, & \text{если } t \geq 1, \end{cases} \quad k \geq 1,$$

имеем $\delta_k = \int_0^1 f(k, t) dt \uparrow 1$ при $k \rightarrow +\infty$. $\triangleright$

3°. Лемма 2. Хотя бы для одной последовательности $\{\varepsilon_n\} \subset (0, 1)$ система рекуррентных уравнений

$$1 + u_{n+1} \cdot \{1 - \varepsilon_{n+1}\} = \lambda_n \cdot (1 - u_n \varepsilon_n), \quad n \geq 1, \quad (6)$$

где $\{\lambda_n\} \subset (1, +\infty)$ – заданная последовательность, имеет решение вида $\{u_n > 0, n \geq 1\}$.

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_n = \frac{1}{1 - \varepsilon_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{1 - \varepsilon_{n+1}} \cdot \lambda_n, \quad x_n = 1 - u_n \cdot \varepsilon_n, \quad n \geq 1,$$

предполагая $\varepsilon_{n+1} \neq 1$ ни при каком n , и преобразуем (6).

При $\varepsilon_n \neq 1$ существование решения $\{x_n < 1, n \geq 1\}$ этой системы равносильно существованию решения $\{u_n > 0, n \geq 1\}$ системы (6). Добавим к этой системе еще одно уравнение $x_1 = \alpha_0 - \beta_0 \cdot x_0$, где $\alpha_0 = \{1/(1 - \varepsilon_1)\}$, $\beta_0 = \{\lambda_0 \varepsilon_1 / (1 - \varepsilon_1)\}$, $\lambda_0 > 1$, и запишем равенство

$$x_{n+1} = \alpha_n - \alpha_{n-1} \beta_n + \dots + (-1)^n \alpha_0 \beta_1 \dots \beta_n + (-1)^{n+1} \beta_0 \dots \beta_n \cdot x_0, \quad n \geq 0. \quad (7)$$

Для последовательности

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{\beta_0} \left(\alpha_0 - \frac{1}{\beta_1} \left(\alpha_1 - \dots - \frac{1}{\beta_n} (\alpha_n - 1) \dots \right) \right) = \\ &= \frac{\alpha_0}{\beta_0} - \frac{\alpha_1}{\beta_0 \beta_1} + \dots + (-1)^n \frac{\alpha_n}{\beta_0 \dots \beta_n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{\beta_0 \dots \beta_n}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

легко проверить, что

$$y_{2k+1} - y_{2k} = \frac{1}{\beta_0 \dots \beta_{2k}} \cdot \frac{\lambda_{2k+1} - 1}{\lambda_{2k+1}} > 0, \quad n \geq 0.$$

Следовательно, при

$$\begin{aligned} 1 > \varepsilon_{n+2} &> \frac{\lambda_{n+2} - 1}{\lambda_{n+1} \cdot \lambda_{n+2} - 1}, \quad n \geq 0, \\ \left(\frac{\lambda_{n+2} - 1}{\lambda_{n+1} \cdot \lambda_{n+2} - 1} \geq \varepsilon_{n+2} > 0, \quad n \geq 0 \right) \end{aligned}$$

$\{y_{2n}\}$ возрастает (не возрастает), $\{y_{2n+1}\}$ убывает (не убывает),

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{y_{2n+1} - y_{2n}\} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{2n} + a = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{2n+1}.$$

Поэтому найдется x_0 такое, что

$$y_{2n} < x_0 < y_{2n+1} \quad \text{при } n \geq 0. \quad (9)$$

Из (7)–(9) выводим

$$x_{2n+2} < \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} \cdot \beta_{2n+1} + \dots - \alpha_0 \cdot \beta_1 \dots \beta_{2n+1} + \beta_0 \dots \beta_{2n+1} \cdot y_{2n+1} = 1,$$

$$x_{2n+2} < \alpha_{2n} - \alpha_{2n+1} \cdot \beta_{2n} + \dots + \alpha_0 \cdot \beta_1 \dots \beta_{2n} - \beta_0 \dots \beta_{2n} \cdot y_{2n} = 1$$

при всех $n \geq 0$. Система (7) с x_0 , удовлетворяющим неравенствам (9), приводит к решению вида $\{x_n < 1, n \geq 1\}$. $\triangleright$

4°. Доказательство теоремы.

Обратимся к интерполяции (4), в которой следует выбрать последовательность удовлетворяющих условиям (1)–(3) функций $\{\hat{g}_n(t)\}$.

Обозначим $\lambda_n = (\delta_n / \delta_{n+1})$, $n \geq 1$. Из-за вогнутости L последовательность $\{\delta_n\}$ не возрастает. Следовательно, $\lambda_n \geq 1$, $n \geq 1$.

Если $\lambda_n = 1$ при некотором n , то берем $\hat{g}_n(t) = t$ при $t \in [0, t_{n+1} - t_n]$. Тогда удовлетворены условия (1)–(3), $\hat{g}_n$ возрастает и вогнута и

$$\hat{g}_n^{(k)}(0) = \hat{g}_n^{(k)}(t_{n+1} - t_n) = 0 \quad \text{при } k \geq 2, \quad (10)$$

что обеспечивает бесконечную дифференцируемость $\hat{g}_n$ на $[0, t_{n+1} - t_n]$.

Следовательно, без ограничения общности можно считать $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$.

Пусть последовательность функций $\{f_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 1, где

$$\varepsilon_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f_n(x) dx, \quad n \geq 1. \quad (11)$$

Функции

$$\hat{g}_n(t) = u_n \cdot (t_{n+1} - t_n) \cdot \int_0^{t/(t_{n+1}-t_n)} f_n(x) dx + t \cdot v_n, \quad n \geq 1, \quad (12)$$

неотрицательны, возрастают и вогнуты на $[0, t_{n+1} - t_n]$, удовлетворяют (1)–(3) и (10) при существовании решения $\{(u_n, v_n), n \geq 1\}$ системы уравнений

$$\begin{cases} u_n \cdot \varepsilon_n + v_n = 1, & u_n > 0, \\ \delta_{n+1} \cdot v_{n+1} + \delta_{n+1} \cdot u_{n+1} = \delta_n \cdot v_n \end{cases} \quad (13)$$

хотя бы для одной последовательности $\{\varepsilon_n\} \subset (0, 1)$.

Исключая v_n , $n \geq 1$, из системы уравнений, приходим к системе рекуррентных уравнений (6). Согласно лемме 2 выбираем последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и $\{u_n\}$. Тогда по (11) и из леммы 1 определяется последовательность $\{f_n\}$, что в силу (13) по формулам $v_n = 1 - u_n \cdot \varepsilon_n$, $n \geq 1$, определяет последовательность $\{v_n\}$. Следовательно, по формулам (12) построена последовательность функций $\{\hat{g}_n(t)\}$.

Так как $\hat{g}_n(t) > 0$ при $t \in (0, t_{n+1} - t_n)$ и верно (10) при $k=2$, то $L_1(t)$

вогнута при $t \geq t_0$. Условия (10) справедливы при всех $k \geq 2$ и $n \geq 1$. Они вместе с условиями (2)–(3) и с бесконечной дифференцируемостью $\{\hat{g}_n(t)\}$ на $[0, t_{n+1} - t_n]$ при каждом $n \geq 1$ обеспечивают бесконечную дифференцируемость $L_1(t)$ при $t \geq t_0$.

Кафедра теории вероятностей и
математической статистики

Поступила 25.11.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. Adamovic' D.D. Sur quelques proprié'tés des fonctions a' croissance lente de Karamata, I, II. – Matematicki Vesnik, 1966, N3, pp.123-136. 161-172.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141с.
3. Даниелян И.Э., Микаелян Г.В. Новое представление медленно меняющейся функции – Уч. записки ЕГУ, 2001, N1.
4. Гельбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, 251с.
5. Мартиросян Р.М. Дополнительные главы математического анализа. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1983, 296с.

Ի.Է. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ՀԱՍԱՐԺԵՔ ԴԱՆԴԱՂ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիցուք $0 < t_0 < t_1 < \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, $\sup_n (t_{n+1} - t_n) < +\infty$:

Ուռուցիկ (դեպի վերև) $L(t) > 0$ դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիայի համար կառուցված է նրան համարժեք $L_1(t)$ ուռուցիկ անվերջ դիֆերենցելի դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիա, որը համընկնում է $L(t) > 0$ -ի հետ նախապես տրված $\{t_n\}$ թվային հաջորդականության վրա:

I.E. DANIELIAN

ON EQUIVALENT SLOWLY VARYING FUNCTIONS

Summary

Let $0 < t_0 < t_1 < \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, $\sup_n (t_{n+1} - t_n) < +\infty$.

For an upward convex slowly varying function $L(t) > 0$ an equivalent slowly varying function $L_1(t)$ has been constructed that is convex, infinitely differentiable, and that coincides with $L(t) > 0$ on a beforehand given numerical sequence $\{t_n\}$.