

А.М. МОВСИСЯН

СВЕРТОЧНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ТОЖДЕСТВА

В данной работе рассматриваются сверточные многочлены и тождества векторных пространств над полем. Они основаны на понятии свертки тензоров.

Пусть I – конечное множество и для каждого $i \in I$ элемента задано векторное пространство V_i над полем k . Мы можем рассматривать их тензорное произведение $\bigotimes_{i \in I} V_i^m$ [1]. В случае, когда все V_i совпадают с одним и тем же пространством V , мы будем обозначать это тензорное произведение $V^{\otimes I}$. Если I – пустое множество $\emptyset$, то условимся считать, что $V^{\otimes I} = V^{\otimes} = k$. Ясно, что если $I = J \cup K$, $J \cap K = \emptyset$, то $V^{\otimes I} = V^{\otimes J} \otimes V^{\otimes K}$.

Далее, мы считаем пространство V конечномерным, через V^* обозначаем пространство, дуальное к V . Пусть I, J – два множества, через $T(I, J)$ обозначаем пространство $V^{\otimes I} \otimes (V^*)^{\otimes J}$ тензоров на V , множество ковариантных индексов, которые обозначены через J , а множество контравариантных индексов – через I . Для $i \in I$, $j \in J$ обозначим через

$$\sigma_j^i : T(I, J) \rightarrow T(I - i, J - j)$$

отображение свертки i -го контравариантного и j -го ковариантного индекса. Это отображение является композицией отображений

$$\begin{aligned} V^{\otimes I} \otimes (V^*)^{\otimes J} &= (V^{\otimes(I-i)} \otimes (V^*)^{\otimes(J-j)}) \otimes ((V^*)^{\otimes\{i\}} \otimes V^{\otimes\{j\}}) \xrightarrow{1 \otimes \chi} \\ &\rightarrow V^{\otimes(I-i)} \otimes (V^*)^{\otimes(J-j)} \otimes k = V^{\otimes(I-i)} \otimes (V^*)^{\otimes(J-j)}, \end{aligned}$$

где $\chi(v \otimes v^*) = v^*(v) \in k = V^{\otimes} \otimes (V^*)^{\otimes}$ для $v \in V$, $v^* \in V^*$,

При этом мы не будем различать тензорные произведения, отличающиеся порядком сомножителей. Нам будет удобно рассматривать также отображения σ_j^i и тогда, когда $i \notin I$ или $j \notin J$, в этом случае мы считаем, что $\sigma_j^i = 0$. Отметим простейшие свойства отображения σ_j^i :

$$1) \sigma_j^i \sigma_{j_1}^{i_1} = \sigma_{j_1}^{i_1} \sigma_j^i, \quad 2) \sigma_j^i \sigma_{j_1}^{i_1} = 0 \quad \sigma_j^i \sigma_j^{i_1} = 0 \quad \text{для любых } i, i_1 \in I, j, j_1 \in J.$$

Пусть теперь I, J – два множества (не обязательно конечные). Обозначим через $U(I, J)$ сумму всех пространств $T(I_1, J_1)$, где $I_1 \subset I$, $J_1 \subset J$ – ко-

нечные подмножества. Отображения σ_j^i естественным образом продолжаются до линейного отображения $U(I, J)$ в себя. Действительно, если $i \in I_1$, $j \in J_1$, то S_j^i определено формулой свертки, и образ содержится в $T(I_1 - i, J_1 - j) \subset U(I, J)$. Если же $i \notin I_1$ или $j \notin J_1$, то S_j^i отображает $T(I_1, J_1)$ в 0. Эти распространения отображений S_j^i удовлетворяют свойствам 1), 2).

Сверточным одночленом на $U(I, J)$ степени ℓ мы называем выражение вида

$$S_{j_1}^{i_1} \dots S_{j_\ell}^{i_\ell},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ — различные элементы из I , $j_1, \dots, j_\ell$ — различные элементы из J .

Линейные комбинации сверточных одночленов на $U(I, J)$ с коэффициентами из k будем называть сверточными многочленами на $U(I, J)$; значением сверточного многочлена

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_\ell \\ j_1, \dots, j_\ell}} \alpha_{i_1, \dots, i_\ell}^{j_1, \dots, j_\ell} S_{j_1}^{i_1} \dots S_{j_\ell}^{i_\ell}$$

на тензоре $u \in U(I, J)$ называем элемент

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_\ell \\ j_1, \dots, j_\ell}} \alpha_{i_1, \dots, i_\ell}^{j_1, \dots, j_\ell} S_{j_1}^{i_1} \dots S_{j_\ell}^{i_\ell} u \in U(I, J).$$

Сумма сверточных многочленов определяется естественно, столь же просто определяется умножение на элементы из поля k . Определим теперь умножение сверточных многочленов, сделаем это сначала для одночленов:

$$(S_{j_1}^{i_1} \dots S_{j_\ell}^{i_\ell})(S_{p_1}^{k_1} \dots S_{p_r}^{k_r}) = S_{j_1}^{i_1} \dots S_{j_\ell}^{i_\ell} S_{p_1}^{k_1} \dots S_{p_r}^{k_r};$$

если множества $\{i_1, \dots, i_\ell\}$ и $\{k_1, \dots, k_r\}$, $\{j_1, \dots, j_\ell\}$ и $\{p_1, \dots, p_r\}$ не пересекаются, то

$$(S_{j_1}^{i_1} \dots S_{j_\ell}^{i_\ell})(S_{p_1}^{k_1} \dots S_{p_r}^{k_r}) = 0$$

в остальных случаях. Распространим теперь это умножение на все сверточные многочлены по дистрибутивности. Легко видеть, что сверточные многочлены на $U(I, J)$ образуют коммутативную ассоциативную алгебру над полем k ; мы будем обозначать эту алгебру $\Sigma(I, J)$.

Сверточный многочлен будем называть однородным степени ℓ , если степени всех одночленов, входящих в него с ненулевыми коэффициентами, равны ℓ .

Особенно важен случай, когда множества I, J состоят из одинакового числа n элементов; однородные сверточные многочлены степени n на $U(I, J)$ называются в этом случае полными сверточными многочленами; их значения на всех $T(I_1, J_1)$ с $I_1 \neq I$ или $J_1 \neq J$ равны 0, а значения их на $T(I, J)$ принадлежат $T(\Phi, \Phi) = k$. Таким образом, если рассматривать лишь

полные сверточные многочлены, то пространство $U(I, J)$ ненужно; все такие многочлены на самом деле являются линейными комбинациями операторов полной свертки для n раз ковариантных и n раз контравариантных тензоров.

Сверточные тождества для тензоров. Пусть V – конечномерное пространство, $I = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $U_V = U(I, I)$ и $\Sigma = \Sigma(I, I)$. Сверточный многочлен $f \in \Sigma$ называется сверточным тождеством на V , если для любого $u \in U_V$ значение многочлена f на u равно 0. Ясно, что сумма, разность сверточных тождеств на V , а также произведение сверточного тождества на любой сверточный многочлен (в том числе на элементы из k) – снова сверточные тождества.

Таким образом, множества J_V сверточных тождеств на пространстве V – идеал кольца Σ . Более того, пусть α, β – два взаимно однозначных отображения I на себя. Для одночлена

$$g = a \cdot S_{j_1}^{i_1} S_{j_2}^{i_2} \dots S_{j_n}^{i_n} \in \Sigma \quad (a \in k)$$

положим

$$g^{(\alpha, \beta)} = a S_{\beta(j_1)}^{\alpha(i_1)} \dots S_{\beta(j_n)}^{\alpha(i_n)} ;$$

распространим по линейности это отображение на все многочлены из Σ . Тогда очевидно, что если $f \in J_V \subset \Sigma$ – сверточное тождество на V , то $f^{(\alpha, \beta)}$ – тоже сверточное тождество на V .

Таким образом, идеал J_V обладает следующим свойством: если $f \in J_V$, то для любых взаимно однозначных отображений α, β множества I в себя $f^{(\alpha, \beta)}$ тоже принадлежит J_V . Такие идеалы алгебры Σ мы будем называть T -идеалами. Ясно, что пересечение любого множества T -идеалов снова – T -идеал. Поэтому можно говорить о T -идеале алгебры Σ , порожденном любым множеством элементов. Множество сверточных многочленов из Σ такое, что T -идеал J совпадает с T -идеалом, порожденным этим множеством, и называется системой образующих T -идеала J .

Носителем одночлена

$$S_{j_1}^{i_1} \dots S_{j_n}^{i_n}$$

называем пару множеств $\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_n\}$. Сверточный многочлен f из Σ назовем сильно однородным, если носители всех одночленов, входящих в него с ненулевыми коэффициентами, совпадают. Каждый сверточный многочлен $f \in \Sigma$ представляется в виде суммы сильно однородных слагаемых

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_r,$$

причем носители различных слагаемых неодинаковы, которые определены с точностью до порядка нулевых слагаемых единственным образом. При этом $f_1, \dots, f_r$ называются сильно однородными компонентами.

Теорема 1. Пусть f – сильно однородный сверточный многочлен и

(I', J') — его носитель. Для того чтобы f был сверточным тождеством на V , необходимо и достаточно, чтобы значения f на тензорах из $T(I', J')$ обращались в ноль.

Доказательство. Необходимость очевидна: значения сверточного тождества обращаются в 0 не только на $T(I', J')$, но и на всех U_V .

Докажем достаточность. Если $I'' \not\subset I'$ или $J'' \not\subset J'$, то значения f на $T(I'', J'')$ равны 0, каковым бы ни был сильно однородный сверточный многочлен f с носителем (I', J') . Пусть $I'' \supset I', J'' \supset J'$. Пространство $T(I'', J'')$ порождается тензорами $u \otimes v$, где $u \in T(I', J')$, $v \in T(I'' \setminus I', J'' \setminus J')$, и ясно, что для $i \in I', j \in J'$ имеем

$$\sigma_j^i(u \otimes v) = \sigma_j^i u \otimes v.$$

Поэтому для любого сверточного одночлена $S_{j_1}^{i_1} \dots S_{j_n}^{i_n}$ с носителем (I', J') , его значение $\sigma_{j_1}^{i_1}, \dots, \sigma_{j_n}^{i_n}(u \otimes v) = \sigma_{j_1}^{i_1}, \dots, \sigma_{j_n}^{i_n} u \otimes v$. Аналогично определяется значение и для любого сильно однородного сверточного многочлена с носителем (I', J') . По условию значение f на $T(I', J')$ равно 0, поэтому и его значение на $u \otimes v \in T(I'', J'')$, а потому и на всех $T(I'', J'')$ равно 0. Итак, значение f на всех прямых слагаемых $T(I'', J'')$ пространства u_v равно 0, т.е. f сверточное тождество на v .

Теорема 2. Если $f \in \Sigma$ — сверточное тождество на V и $f = f_1 + f_2 + \dots + f_r$ — разложение сверточного многочлена f в сумму сильно однородных компонент, то сверточные многочлены $f_1, f_2, \dots, f_r$ также являются сверточными тождествами на V .

Доказательство. Применим индукцию по r ; при $r=1$ доказывать нечего. Пусть утверждение уже доказано для сверточных тождеств, имеющих $r-1$ сильно однородную ненулевую компоненту. Среди слагаемых $f_1, f_2, \dots, f_r$ выберем такое, носитель которого не содержит носителя ни одного другого слагаемого. Такое слагаемое обязательно существует. Например, в качестве такого слагаемого можно взять любое такое, носитель которого имеет наименьшую мощность. Не ограничивая общности, можно считать выбранным слагаемое f_r .

Пусть (I_r, J_r) — носитель f_r ; рассмотрим множество $T(I_r, J_r)$. Поскольку для любого слагаемого f_s его носитель (I_s, J_s) таков, что либо $I_s \not\subset I_r$, либо $J_s \not\subset J_r$, то значение f_s на $T(I_r, J_r)$ равно 0. Поскольку $f = f_1 + f_2 + \dots + f_{r-1}$ тоже обращается в 0 на $T(I_r, J_r)$, получаем, что все значения f_r на $T(I_r, J_r)$ равны 0. По теореме 1, f_r — сверточное тождество на v . Но тогда $f - f_r = f_1 + f_2 + \dots + f_{r-1}$ тоже — сверточное тождество на V и по индукции, сверточные многочлены $f = f_1, f_2, \dots, f_{r-1}$ также являются сверточными тождествами.

Теорема 3. T -идеал сверточных тождеств J_v порождается сильно однородными тождествами, носители которых имеют вид $\{1, 2, \dots, n\}, \{1, 2, \dots, n\}$ (число n , вообще говоря, свое для каждого тождества).

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что J_v порождается сильно однородными сверточными тождествами. Пусть f – одно из них и (I', J') – его носитель. Ясно, что порядки I' и J' одинаковы; пусть они равны n . Существуют такие взаимно однозначные отображения α, β множества I на себя, что $\alpha(I') = \{1, 2, \dots, n\}$, $\beta(J') = \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда $f_1 = f^{(\alpha, \beta)} \in J_v$, носитель f_1 равен $\{1, 2, \dots, n\}, \{1, 2, \dots, n\}$ и f принадлежит любому T -идеалу, содержащему f_1 , так как $f = f_1^{(\alpha^{-1}, \beta^{-1})}$. Следовательно, в системе образующих T -идеала J_v сверточный многочлен f можно заменить f_1 , удовлетворяющим условиям предложения теоремы 3. Применяя это рассуждение ко всем сильно однородным сверточным многочленам, составляющим систему образующих T -идеала J_v , мы получаем требуемое утверждение.

Кафедра общеобразовательных дисциплин

Поступила 30.08.2000

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев А.В., Мовсисян А.М. – Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН СССР, 1982, т. 114, с. 211-214.

Ա.Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՓԱԹԱԹՄԱՆ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ ԵՎ ՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում տեղադրների փաթաթման գաղափարի հիման վրա դիտարկվում են փաթաթման բազմանդամներ և նույնություններ: Փաթաթման բազմանդամները հանդիսանում են տեղափոխական զուգորդական հանրահաշիվ: Փաթաթման նույնությունների բազմությունը կազմում է T -իդեալ: Փաթաթման նույնությունների T -իդեալը ծնվում է ուժեղ համասեռ նույնություններով:

A.M. MOVSISIAN

CONVOLUTION POLYNOMIALS AND IDENTITIES

Summary

This paper investigates the convolution polynomials and identities of vector spaces on the field. These results are based on tensor convolutions.