

УДК 539.6

В.С. САРКИСЯН, И.М. КАРАХАНЫАН

О ФАКТОРИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА УПРУГОЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена факторизации задачи напряженно-деформируемого состояния упругого пространства, содержащего упругое полубесконечное включение. Задача в предположении, что упругое включение, достаточно тонкое, сведено к решению граничной задачи дифракции гармонической волны на полубесконечном интервале. Используя метод Винера–Хопфа и метод циркулянтов, граничную задачу свели к матричному уравнению Винера–Хопфа, которая полностью решается. Это позволяет получить аналитическое решение граничной задачи.

Данная работа посвящена факторизации матриц-функций матричного уравнения Винера–Хопфа, возникающего в граничной задаче дифракции гармонической волны на упругое полубесконечное включение. Смешанным задачам динамической теории упругости посвящено много работ (см., напр., [1–5]). Важными в этом контексте являются вопросы, посвященные обобщенным методам факторизации, которые более подробно рассмотрены в работах [6,7]. В основе этих методов лежат классические методы факторизации функций и матриц-функций (см. [8–14]). Здесь, применяя метод факторизации с использованием техники циркулянтов, получили полное аналитическое решение ниже сформулированной граничной задачи.

Сформулируем изучаемую здесь граничную задачу ($\mathcal{A}$).

Рассматривается стационарное уравнение

$$\Delta v + k^2 v = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (1)$$

при $|y| > 0$, $y_0 > 0$, которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} v(x, +0) = \nu v(x, -0), \\ \frac{\partial v(x, +0)}{\partial y} = \mu \frac{\partial v(x, -0)}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

при $x < 0$, где параметры μ , ν не должны принимать следующие вырожденные случаи $\mu \pm \nu \neq 0$, а также $(\mu = -1, \nu = -1)$ или $(\mu = 1, \nu = -1)$ или $(\mu = -1, \nu = 1)$

$$\begin{cases} v(x, +0) = v(x, -0), \\ \frac{\partial v(x, +0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, -0)}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

при $x > 0$.

Мы также предположим, что вдоль ребра линии включения выполнялось условие Зоммерфельда на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = 0, \quad (4)$$

где $k = \Re(k) + i\Im(k)$ и $\Re(k) > 0$, $\Im(k) > 0$, и что в начале координат около включения выполнялось условие

$$\lim_{x \rightarrow +0} v(x, +0) = O(x^\eta), \quad \text{где } 0 < \Re(\eta) < \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Решение нашей граничной задачи мы будем искать в классе функций, для которых при $|x| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика $O(|x|^{-\frac{1}{2}} e^{-|x|\Im(k)})$.

Применяя преобразование Фурье к функции $v(x, y)$ по переменной x т. е.

$$\hat{v}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad (6)$$

которая существует в полосе $|\Im(\alpha)| < \Im(k)$, мы для функции $\hat{v}$ получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} + \kappa^2(\alpha) \hat{v} = e^{i\alpha y_0} \delta(y - y_0), \quad (7)$$

где $\kappa(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ определяется как та ветвь, для которой $\kappa(0) = k$ с вертикальными разрезами от k до бесконечности в полуплоскости $\Im(\alpha) > 0$ и от $-k$ до бесконечности в полуплоскости $\Im(\alpha) < 0$. Тогда в полосе $|\Im(\alpha)| < \Im(k)$ мнимая часть $\kappa(\alpha)$ положительна.

В этом случае решение уравнения (7) запишется в виде

$$\hat{v}(\alpha, y) = \begin{cases} a(\alpha) e^{i\kappa(\alpha)y} + \frac{1}{2i\kappa(\alpha)} e^{i(\alpha y_0 + \kappa(\alpha)|y - y_0|)} & \text{при } y > 0, \\ b(\alpha) e^{i\kappa(\alpha)y} & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из представления (8) следует, что при $y \rightarrow \pm\infty$ функция $\hat{v}(\alpha, y)$ является затухающей.

Пусть

$$\begin{cases} v_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 [v(x, +0) - v(x, -0)] e^{i\alpha x} dx, \\ v_+(\alpha) = \int_0^{\infty} [v(x, +0) - v(x, -0)] e^{i\alpha x} dx, \\ w_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial v(x, +0)}{\partial y} - \frac{\partial v(x, -0)}{\partial y} \right] e^{i\alpha x} dx, \\ w_+(\alpha) = \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial v(x, +0)}{\partial y} - \mu \frac{\partial v(x, -0)}{\partial y} \right] e^{i\alpha x} dx. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда $v_-(\alpha)$ и $w_-(\alpha)$ – аналитические функции в полуплоскости $\Im(\alpha) < \Im(k)$, а $v_+(\alpha)$ и $w_+(\alpha)$ – аналитические функции в полуплоскости $\Im(\alpha) > -\Im(k)$.

Учитывая представления (8), (9), мы приходим к следующему матричному уравнению Винера–Хопфа:

$$\bar{v}_+(\alpha) = L(\alpha)\bar{v}_-(\alpha) + \bar{m}(\alpha), \quad (10)$$

где $v_+(\alpha) = \begin{pmatrix} v_+(\alpha) \\ w_+(\alpha) \end{pmatrix}$, $\bar{v}_-(\alpha) = \begin{pmatrix} v_-(\alpha) \\ w_-(\alpha) \end{pmatrix}$, а

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\nu, & \frac{1-\nu}{i\kappa(\alpha)} \\ (1-\mu)i\kappa(\alpha), & (1+\mu) \end{bmatrix} \text{ и } \bar{m}(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)e^{i(\alpha\alpha_0+\kappa(\alpha)y_0)}}{i\kappa(\alpha)} \\ (\mu-1)e^{i(\alpha\alpha_0+\kappa(\alpha)y_0)} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что

$$L(\alpha) = SN(\alpha), \quad (12)$$

где

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\nu, & 0 \\ 0, & 1+\mu \end{bmatrix}, \quad N(\alpha) = \begin{bmatrix} 1, & \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{i\kappa(\alpha)} \\ \frac{1-\mu}{1+\mu} i\kappa(\alpha), & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Для решения матричного уравнения Винера–Хопфа (10) нам фактически необходимо факторизовать матрицу-функцию $N(\alpha)$, которая является f -циркулянтотом с

$$f(\alpha) = \left(\frac{i\kappa(\alpha)}{\rho} \right)^2, \quad (14)$$

где $\rho = \sqrt{\frac{(1-\nu)(1+\mu)}{(1+\nu)(1-\mu)}}$.

Так как алгебра f -циркулянтотом есть комплексная коммутативная банахова алгебра, то матрица-функция $N(\alpha)$ допускает факторизацию в виде

$$N(\alpha) = N_+(\alpha)N_-(\alpha), \quad (15)$$

где

$$N_+(\alpha) = \sqrt{1-\theta^2} \begin{bmatrix} \cosh T(\alpha), & \frac{\rho}{\gamma(\alpha)} \sinh T(\alpha) \\ \frac{\gamma(\alpha)}{\rho} \sinh T(\alpha), & \cosh T(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

а $N_-(\alpha) = N_+(-\alpha)$.

Здесь

$$T(\alpha) = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{1+\theta}{1-\theta} \ln \frac{\gamma(\alpha)+\alpha-k}{\gamma(\alpha)-\alpha+k}, \quad (17)$$

где $\theta = \sqrt{\frac{(1-\nu)(1-\mu)}{(1+\nu)(1+\mu)}}$.

Отметим, что под $\ln$ мы понимаем главную ветвь логарифма, т. е. $\ln(1)=0$ и $-\pi < \arg(\cdot) \leq \pi$.

Из представления (16) видно, что $N_+(\alpha)$ – аналитическая матрица-функция в полуплоскости $\Im(\alpha) > -\Im(k)$, а $N_-(\alpha)$ – аналитическая матрица-функция в полуплоскости $\Im(\alpha) < \Im(k)$.

Из логарифмического представления функции $T(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и $\Im(\alpha) > -\Im(k)$ имеем

$$\cosh T(\alpha) = O(\alpha^\eta), \quad \sinh T(\alpha) = O(\alpha^\eta), \quad (18)$$

где $\Re(\eta) = \frac{1}{2\pi} \left| \arg \left(\frac{1+\theta}{1-\theta} \right) \right|$ и, следовательно, $0 < \Re(\eta) < \frac{1}{2}$.

Аналогично при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и $\Im(\alpha) < \Im(k)$ имеем

$$\cosh T(-\alpha) = O(\alpha^\eta), \quad \sinh T(-\alpha) = O(\alpha^\eta). \quad (19)$$

Полагая

$$L_s^+(\alpha) = (S N_+(\alpha))^{-1}, \quad L_s^-(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{2} N_-(\alpha), \quad (20)$$

матричное уравнение (10) запишем в виде

$$L_s^+(\alpha) \tilde{v}_+(\alpha) = L_s^-(\alpha) \tilde{v}_-(\alpha) + \tilde{M}(\alpha), \quad (21)$$

где $\tilde{M}(\alpha) = L_s^+(\alpha) \tilde{m}(\alpha) = \begin{bmatrix} M_1(\alpha) \\ M_2(\alpha) \end{bmatrix}$.

Пусть число $p > 0$ выбрано так, что

$$-\Im(k) < -p < \Im(\alpha) < p < \Im(k),$$

тогда по функциям $M_1(\alpha)$ и $M_2(\alpha)$ рассмотрим следующие функции:

$$\begin{cases} M_1^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ip}^{\infty-ip} \frac{M_1(s)}{s-\alpha} ds, \\ M_2^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ip}^{\infty-ip} \frac{M_2(s)}{s-\alpha} ds. \end{cases} \quad (22)$$

которые есть аналитические функции в полуплоскости $\Im(\alpha) > -p$ и при $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеют асимптотики

$$M_1^+(\alpha) = O(\alpha^{-1}), \quad M_2^+(\alpha) = O(\alpha^{-1}), \quad (23)$$

а также функции

$$\begin{cases} M_1^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ip}^{\infty+ip} \frac{M_1(s)}{\alpha-s} ds, \\ M_2^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ip}^{\infty+ip} \frac{M_2(s)}{\alpha-s} ds, \end{cases} \quad (24)$$

которые есть аналитические функции в полуплоскости $\Im(\alpha) < p$ и при $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеют такие же асимптотики, как и в (23).

Тогда для вектор-функции $\vec{M}(\alpha)$ имеем, что

$$\vec{M}(\alpha) = \vec{M}_+(\alpha) + \vec{M}_-(\alpha), \quad (25)$$

где $\vec{M}_+(\alpha) = \begin{bmatrix} M_1^+(\alpha) \\ M_2^+(\alpha) \end{bmatrix}$, $\vec{M}_-(\alpha) = \begin{bmatrix} M_1^-(\alpha) \\ M_2^-(\alpha) \end{bmatrix}$ и матричное уравнение (10) запишется в виде

$$L_s^+(\alpha)\vec{v}_+(\alpha) - \vec{M}_+(\alpha) = L_s^-(\alpha)\vec{v}_-(\alpha) + \vec{M}_-(\alpha). \quad (26)$$

Используя принцип аналитического продолжения для вектор-функции

$$\vec{J}(\alpha) = \begin{bmatrix} J_1(\alpha) \\ J_2(\alpha) \end{bmatrix}, \text{ где}$$

$$\vec{J}(\alpha) = L_s^+(\alpha)\vec{v}_+(\alpha) - \vec{M}_+(\alpha) = L_s^-(\alpha)\vec{v}_-(\alpha) + \vec{M}_-(\alpha), \quad (27)$$

получаем, что $\vec{J}(\alpha)$ есть целая вектор-функция.

Так как при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\Im(\alpha) < \Im(k)$

$$v_-(\alpha) = O(\alpha^{-\eta-1}), w_-(\alpha) = O(\alpha^{-\eta}), \quad (28)$$

а в полуплоскости $\Im(\alpha) > -\Im(k)$

$$v_+(\alpha) = O(\alpha^{-\eta-1}), w_+(\alpha) = O(\alpha^{-\eta}), \quad (29)$$

то, используя теорему Лиувилля, имеем

$$\begin{cases} J_1(\alpha) \equiv 0 \\ J_2(\alpha) \equiv C. \end{cases} \quad (30)$$

Пусть

$$M_1^{<+>} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha M_1^+(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ip}^{\infty - ip} M_1(s) ds. \quad (31)$$

Из представления (30) для коэффициентов $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ получаем, что

$$\left\{ \begin{aligned} a(\alpha) &= \frac{1}{v+\mu} \left\{ \left[\mu(1+v) \cosh T(\alpha) - \frac{v(1+\mu)}{\rho} \sinh T(\alpha) \right] M_1^+(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + [\mu(1+v)\rho \sinh T(\alpha) - v(1+\mu) \cosh T(\alpha)] \frac{(M_2^+(\alpha) + C)}{\gamma(\alpha)} \right\} + \\ &\quad + \frac{v-\mu}{v+\mu} \frac{e^{i(\alpha x_0 + \kappa(\alpha) y_0)}}{i\kappa(\alpha)}, \\ b(\alpha) &= -\frac{1}{v+\mu} \left\{ \left[(1+v) \cosh T(\alpha) - \frac{1+\mu}{\rho} \sinh T(\alpha) \right] M_1^+(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + [(1+v)\rho \sinh T(\alpha) + (1+\mu) \cosh T(\alpha)] \frac{(M_2^+(\alpha) + C)}{\gamma(\alpha)} \right\} + \\ &\quad + \frac{e^{i(\alpha x_0 + \kappa(\alpha) y_0)}}{(v+\mu)i\kappa(\alpha)}. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Отсюда следует, что при $|\alpha| \rightarrow \infty$ коэффициенты $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ имеют

асимптотику $O(\alpha^{-\eta-1})$.

Исключая вырожденные случаи, мы, исходя из поведения коэффициентов $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ на бесконечности, получаем, что

$$C = -\frac{\hat{\theta} M_1^{<+>}}{\rho}, \text{ где } \hat{\theta} = -\operatorname{sgn}\left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right). \quad (33)$$

Обозначая через $D_{1,2}^{+}(\alpha) = \frac{1}{\rho\gamma(\alpha)}[\rho M_2^{+}(\alpha) - \hat{\theta} M_1^{<+>}]$ и подставляя значение коэффициентов $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ из (32) в выражение для преобразования Фурье $\hat{v}(\alpha, y)$, имеем

$$\hat{v}(\alpha, y) = \begin{cases} \frac{1}{v+\mu} \left\{ \left[\mu(1+v) \cosh T(\alpha) - \frac{v(1+\mu)}{\rho} \sinh T(\alpha) \right] M_1^{+}(\alpha) + \right. \\ \left. + [\mu(1+v)\rho \sinh T(\alpha) - v(1+\mu) \cosh T(\alpha)] D_{1,2}(\alpha) \right\} e^{iy\kappa(\alpha)} + \\ + \frac{v-\mu}{v+\mu} e^{i(\alpha x_0 + \kappa(\alpha)(y+y_0))} + \frac{1}{2i\kappa(\alpha)} e^{i(\alpha x_0 + \kappa(\alpha)(y-y_0))} \text{ при } y > 0, \\ -\frac{1}{v+\mu} \left\{ \left[(1+v) \cosh T(\alpha) + \frac{1+\mu}{\rho} \sinh T(\alpha) \right] M_1^{+}(\alpha) + \right. \\ \left. + [(1+v)\rho \sinh T(\alpha) + (1+\mu) \cosh T(\alpha)] D_{1,2}(\alpha) \right\} e^{-iy\kappa(\alpha)} + \\ + \frac{1}{(v+\mu)\kappa(\alpha)} e^{i(\alpha x_0 + \kappa(\alpha)y_0)} \text{ при } y < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Учитывая интегральное представление функции Ганкеля $H_0^{(1)}(\cdot)$, а также используя обратное преобразование Фурье к функции $\hat{v}(\alpha, y)$ по переменной α , мы получим следующее представление для решения $v(x, y)$ граничной задачи (A):

$$v(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(v+\mu)} \int_{-\infty+id}^{\infty+id} \left\{ \left[\mu(1+v) \cosh T(\alpha) - \frac{v(1+\mu)}{\rho} \sinh T(\alpha) \right] M_1^{+}(\alpha) + \right. \\ \left. + [\mu(1+v)\rho \sinh T(\alpha) - v(1+\mu) \cosh T(\alpha)] D_{1,2}(\alpha) \right\} e^{-i(\alpha x - \kappa(\alpha)y)} d\alpha + \\ + \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kR) + \frac{v-\mu}{v+\mu} \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kR') \text{ при } y > 0, \\ -\frac{1}{2\pi(v+\mu)} \int_{-\infty+id}^{\infty+id} \left\{ \left[(1+v) \cosh T(\alpha) - \frac{1+\mu}{\rho} \sinh T(\alpha) \right] M_1^{+}(\alpha) + \right. \\ \left. + [\rho(1+\mu) \sinh T(\alpha) + (1+\mu) \cosh T(\alpha)] D_{1,2}(\alpha) \right\} e^{-i(\alpha x + \kappa(\alpha)y)} d\alpha + \\ + \frac{1}{2i(v+\mu)} H_0^{(1)}(kR) \text{ при } y < 0, \end{cases} \quad (35)$$

где $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $R' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}$.

При помощи выражения (35) и известных формул для напряжения получим напряженно-деформируемую картину задачи.

Кафедра механики сплошной среды

Поступила 23.03.2001

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко Б.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
2. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1983.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А., Прякина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999.
4. Морарь Г.А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел. Кишинев: Штиинца, 1984.
5. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1984.
6. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственно динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
7. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
8. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
9. Крейн М.Г. УМН, 1955, т. 13, в. 5, с. 1-150.
10. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: ИЛ, 1962.
11. Чеботарев Г.Н. Тр. всесоюзного математического съезда, 1956, т. I, с. III.
12. Litvinchuk G.S., Spitkowski I.M. Factorization of Matrix-funktions. Akademie-Verlag. Berlin, 1987.
13. Камалян А.Г. – ДАН Армении, 1992, т. 93, №3, с. 99-104.
14. Бремерман Г.Б. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.

Վ.Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ի.Մ. ՎԱՐՄԱՆՅԱՆ

ԱՌԱՉԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՆՎԵՐՋ ՆԵՐԴՐՈՒՄՈՎ ՀԱՐՍՈՆԻԿ ԱՄԻԵԻ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ԽՆԴՐԻ ՖԱԿՏՈՐԻԶԱՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է առաձգական տարածության լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի ֆակտորիզացիային, որը պարունակում է կիսաանվերջ ներդիր: Ենթադրվում է, որ առաձգական ներդիրը բավականին բարակ է, և խնդիրը բերվում է կիսաանվերջ ինտերվալի վրա հարմոնիկ ալիքի դիֆրակցիայի եզրային խնդրին: Օգտագործելով Վիներ-Հոփի մեթոդը և ցիրկուլյանտների եղանակը, այդ խնդիրը բերում ենք Վիներ-Հոփի մատրիցային հավասարմանը, որը ամբողջությամբ լուծվում է: Այն թույլ է տալիս ստանալ եզրային խնդրի անալիտիկ լուծումը:

ON FACTORIZATION IN THE PROBLEM OF DIFFRACTION
OF HARMONIC WAVE ON ELASTIC HALF INFINITE INCLUSION

Summary

The paper is devoted to the factorization of stress strain state of elastic space including half infinitive inclusion. Supposing that elastic inclusion is too thin the problem is reduced to the solution of boundary problem of harmonic wave diffraction on the half infinitive interval. Using the method of Wiener-Hopf and circulant method the boundary problem is reduced to the Wiener-Hopf matrix equation, which is completely solved. This solution allows to get analytical solution of the boundary problem.