

УДК 517.53

Т.Л. ГАРИБЯН

О ЛОКАЛИЗАЦИИ СПИРАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ. II

В настоящей статье исследуется локализация особенностей степенного ряда, лежащих вне его круга сходимости и на заданном спиральном угле. Рассматриваются как конечные, так и бесконечные особенности.

§1. Введение. Формулировка результатов. Настоящая работа продолжает и дополняет начатое в [1] изучение вопросов о локализации спиральных особенностей степенных рядов на внешности их круга сходимости. Напомним, что в упомянутой статье в терминах лакун коэффициентов степенного ряда исследовались вопросы о наличии конечных особенностей на заданном спиральном угле. Здесь же получены результаты о наличии особенностей степенных рядов на заданном спиральном угле как в случае конечных, так и бесконечных особенностей. Аналогичные вопросы о локализации прямолинейных особенностей исследовались в недавней статье [2] А. Яврян.

Чтобы сформулировать основные результаты работы, введем необходимые обозначения.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 1, \quad (1)$$

радиус сходимости которого равен единице. Обозначим для него

$$Q = \{m \in N : f_m \neq 0\} = \{m_s\}_1^{\infty}.$$

Для чисел $\mu > 1$ и γ ($|\gamma| < \pi/2$) введем величины

$$a = \frac{\mu(\mu \cos 2\gamma + \cos \gamma)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1}, \quad b = \frac{\mu|\sin \gamma|(2\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1},$$

и пусть $w_\kappa(t)$ означает число элементов конечного множества

$$Q \cap [n_\kappa, m_\kappa], \quad \kappa > 1$$

Для чисел $\alpha \in R$ и $\beta \in (0, 2\pi)$ рассмотрим спиральный угол

$$\Delta_\beta^\alpha = \{z : |\arg z - \alpha \log |z|| < \beta\},$$

при $\alpha = 0$ будем полагать $\Delta_\beta = \Delta_\beta^0$.

Основными результатами работы являются приводимые ниже теоремы 1, 2.

Теорема 1. Пусть для степенного ряда (1) последовательность $\{n_k\}_1^\infty \subset Q$ удовлетворяет условию

$$\liminf_{n_k \rightarrow \infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = \rho > 0$$

и для некоторых чисел $\gamma (|\gamma| > \pi/2)$ и $\lambda \in (0, 1]$ выполнено

$$\limsup_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \mu > 1 \\ n_k > t}} \left\{ \lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma) + |\operatorname{tg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} 2\gamma| \right) \right] - \frac{1}{n_k} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t) dt}{(t+a)^2 + b^2} \right\} > \\ > \frac{1}{2 \cos^2 \gamma} \log \frac{1}{\rho} + \log(2 \cos \gamma) + |\operatorname{tg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} 2\gamma| \right) + |\operatorname{ctg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} \gamma| \right).$$

Тогда ряд (1) либо имеет конечную особенность в $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$, где $\alpha = -i\gamma$, либо его аналитическое продолжение в $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$ неограничено.

Для последовательности Q , чисел $n \in N$, $\gamma \in R$ и $\mu > 1$ положим

$$S_Q^\gamma(n, \mu) = \begin{cases} \sum_{m_S \in [n, 2\mu n \cos \gamma] \cap Q} \frac{1}{m_S}, & [n, 2\mu n \cos \gamma] \cap Q \neq \emptyset, \\ 0, & [n, 2\mu n \cos \gamma] \cap Q = \emptyset. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть для степенного ряда (1) последовательность $\{n_k\}_1^\infty \subset Q$ удовлетворяет условию

$$\liminf_{n_k \rightarrow \infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = \rho > 0$$

и для некоторых чисел $\gamma (|\gamma| < \pi/6)$ и $\lambda \in (0, 1]$ выполнено

$$\limsup_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \mu > 1 \\ n_k > t}} \left\{ \lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma) + |\operatorname{tg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} 2\gamma| \right) \right] - S_Q^\gamma(n_k, \mu) \right\} > \\ > \frac{1}{2 \cos^2 \gamma} \log \frac{1}{\rho} + 1 + |\operatorname{tg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} 2\gamma| \right).$$

Тогда ряд (1) либо имеет конечную особенность в $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$, либо его аналитическое продолжение в $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$ неограничено.

§2. Доказательства. Приведем сперва вспомогательное утверждение, используемое в доказательствах теорем 1, 2.

Лемма. Пусть степенной ряд (1) допускает аналитическое продолжение f в спиральный угол $C \setminus \overline{\Delta_{2\sigma}^\alpha}$, $\sigma \in (0, \pi)$ и для некоторых констант $v > 0$ и $c > 0$

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^v + 1} \quad \text{для } z \in C \setminus \Delta_{2\sigma}^\alpha. \quad (2)$$

Тогда существует голоморфная в полуплоскости $\Pi_\alpha = \{(\xi, \eta): \xi - \alpha\eta \geq 0\}$ - функция φ , для которой

$$\varphi(n) = (-1)^n f_n, \quad n \in N \cup \{0\}, \quad (3)$$

и выполняется оценка: для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $c_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|\varphi(\xi + i\eta)| \leq c_\varepsilon \exp(\sigma|\eta| + (\xi - \alpha\eta)\varepsilon), \quad (\xi, \eta) \in \Pi_\alpha. \quad (4)$$

Доказательство. Для $r \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, 1 - \sigma)$ положим

$$\ell_{r, \delta} = \{z: |z| = r\} \cap \Delta_{2\sigma + \delta}^\alpha,$$

$$\ell_{r, \delta}'' = \{z: |\arg z - \alpha \log r| = \sigma + \delta, |z| \geq r\}$$

и определим на Π_α функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_{r, \delta}} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_{r, \delta}''} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}} dz = J_1 + J_2,$$

где $z^\zeta = \exp(\zeta \log z)$, $\log z = \log|z| + i \arg z$,

$$\alpha \log z - (\sigma + \delta) \leq \arg z \leq \alpha \log z + (\sigma + \delta).$$

Сходимость несобственного интеграла J_2 при $\xi - \alpha\eta \geq 0$ следует из условия (2).

Далее, если положить $\ell_R = \{z: |z| = R\} \cap \Delta_{2\sigma}^\alpha$, то из (2) будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_R} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}} dz \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Отсюда с учетом интегральной теоремы Коши следуют равенства (3), а также независимость значений φ от выбора $r \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, 1 - \sigma)$. С учетом (2)

$$|J_2| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_{r, \delta}''} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}} dz \right| \leq \frac{c}{2\pi} \int_{\ell_{r, \delta}''} \frac{|z^{-(\zeta+1)}|}{|z|^v + 1} |dz|.$$

При $\zeta = \xi + i\eta$ и $\log z = \log t + i \arg z$, $t \geq r$, имеем

$$\begin{aligned} |z^{-(\zeta+1)}| &= |\exp(-(\zeta+1)\log z)| = |\exp(-(\xi + i\eta + 1)(\log t + i \arg z))| = \\ &= \exp(-(\xi + 1)\log t + \eta \arg z) = \exp(-(\xi + 1)\log t + \eta(\alpha \log t \pm (\sigma + \delta))) = \\ &= \exp(-(\xi - \alpha\eta + 1)\log t \pm \eta(\sigma + \delta)) \leq \exp(-(\xi - \alpha\eta + 1)\log t + |\eta|(\sigma + \delta)). \end{aligned}$$

Следовательно, найдем оценку

$$|J_2| \leq c_1 \exp(|\eta|(\sigma + \delta) - (\xi - \alpha\eta)\log r), \quad (\xi, \eta) \in \Pi_\alpha, \quad (5)$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от r и δ .

Аналогично

$$|J_1| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_{r, \delta}} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z|=r} |f(z)| \int_{\ell_{r, \delta}} \frac{|dz|}{|z^{\zeta+1}|}.$$

Так как при $z \in \ell_{r,\delta}$

$$\begin{aligned} |z^{-(\zeta+1)}| &= |\exp(-(\xi + i\eta + 1)(\log r + i \arg z))| = \exp(-(\xi - \alpha\eta + 1)\log r + \\ &+ \eta(\arg z - \alpha \log r)) \leq \exp(-(\xi - \alpha\eta + 1)\log r + |\eta| |\arg z - \alpha \log r|) \leq \\ &\leq \exp(-(\xi - \alpha\eta + 1)\log r + |\eta|(\sigma + \delta)), \end{aligned}$$

то теперь получим

$$|J_1| \leq c_r \exp(-(\xi - \alpha\eta + 1)|\eta|(\sigma + \delta)), \quad (\xi, \eta) \in \Pi_\alpha, \quad (6)$$

где постоянная $c_r > 0$ не зависит от δ .

Из оценок (5), (6), устремляя $\delta \rightarrow 0$ и выбирая r достаточно близким к 1, для функции φ получим требуемую оценку (4).

Доказательство теоремы 1. Предположим, что элемент (1) допускает ограниченное аналитическое продолжение f в угол $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$. Тогда, используя предыдущую лемму, построим для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n z^{n-1} = \frac{f(-z) - f_0}{z}$$

соответствующую ему по этой лемме функцию φ .

Возьмем круг $D_\mu = \{\zeta : |\zeta - \mu| < \mu\}$ и обозначим через g_μ его функцию Грина с полюсом в точке $\zeta_0 = e^{-i\gamma}$. Легко видеть, что

$$g_\mu(\zeta) = \log \left| \frac{\mu^2 - (\bar{\zeta} - \mu)(\zeta_0 - \mu)}{\mu(\zeta - \zeta_0)} \right|. \quad (7)$$

Применим к функции $\phi_k(\zeta) = \varphi(n_k \zeta e^{i\gamma})$ и кругу D_μ формулу Пуассона-Иенсена в точке $\zeta = \zeta_0$. В результате с учетом (3) получим

$$\log |f_{n_k}| + \sum_{\zeta_k} g_\mu(\zeta_k) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_\mu} \log |\phi_n(\zeta)| \frac{\partial g_\mu(\zeta)}{\partial \ell} |d\zeta|, \quad (8)$$

где ℓ – внутренняя нормаль к окружности ∂D_μ , а сумма слева берется по всем нулям (с учетом кратности) функции $\phi_k(\zeta)$ из круга D_μ , лежащим на луче $\arg \zeta = -\gamma$, $|\zeta| > 1$.

С учетом (4) оценим интеграл J в правой части (8). Имеем (подробности см. [1])

$$J \leq \frac{n_k \sigma}{2\pi} J_0 + \varepsilon n_k + \log c_\varepsilon, \quad (9)$$

где

$$J_0 = \int_{\partial D_\mu} |\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| \left| \frac{\partial g_\mu(\zeta)}{\partial \ell} \right| |d\zeta|.$$

Применяя лемму работы [1] и формулу (7), простыми вычислениями найдем

$$J_0 = \frac{2(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \log(2\mu \cos \gamma - 1) +$$

$$+ \frac{2\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left\{ \arctg \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \arctg \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right\}.$$

Следовательно, получим оценку

$$J \leq \frac{\sigma n_k}{\pi} \left\{ \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \log(2\mu \cos \gamma - 1) + \right. \\ \left. + \frac{\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left[\arctg \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \arctg \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right] \right\} + \varepsilon n_k + \log c_\varepsilon. \quad (10)$$

Теперь, учитывая, что согласно лемме 3 из работы [3]

$$m(t) \geq (t-1)n_k - w_k(t) - 2, \quad (11)$$

где $m(t)$ — количество нулей (с учетом их кратности) функции $\phi_k(\zeta)$ на отрезке $[e^{-i\gamma}, te^{-i\gamma}]$, $t \in [1, 2\mu \cos \gamma]$, преобразуем и оценим снизу сумму в левой части (8), как в теореме 1 из [1]. В результате получим

$$\sum \geq \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{n_k(t-1) - w_k(t) - 2}{(t+a)^2 + b^2} dt = \\ = \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left\{ \frac{n_k}{2} \log \frac{(2\mu \cos \gamma + a)^2 + b^2}{(1+a)^2 + b^2} - \right. \\ \left. - \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t) dt}{(t+a)^2 + b^2} - n_k \left(\frac{1+a}{b} + \frac{2}{bn_k} \right) \left(\arctg \frac{2\mu \cos \gamma + a}{b} - \arctg \frac{1+a}{b} \right) \right\}. \quad (12)$$

Отсюда с учетом (10), (12) после умножения (8) на $(2n_k)^{-1}$ будем иметь

$$\frac{1}{2n_k} \log |f_{n_k}| + \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{(2\mu \cos \gamma + a)^2 + b^2}{(1+a)^2 + b^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{n_k} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t) dt}{(t+a)^2 + b^2} - \frac{1+a}{b} \left(\arctg \frac{2\mu \cos \gamma + a}{b} - \arctg \frac{1+a}{b} \right) \right\} \leq \\ \leq (1-\lambda) \left\{ \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \log(2\mu \cos \gamma - 1) + \right. \\ \left. + \frac{\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \left[\arctg \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \arctg \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right] \right\} + \\ + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_0(n_k), \quad (13)$$

где $\gamma_0(n_k) \rightarrow 0$ при $n_k \rightarrow \infty$ и не зависит от μ . Следовательно, получим

$$\sup_{\substack{\mu > 1 \\ n_k > 1}} \left\{ \lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma - 1) + \frac{\mu |\sin \gamma|}{\mu \cos \gamma - 1} \left(\arctg \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \arctg \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{n_k} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t) dt}{(t+a)^2 + b^2} \right\} \leq \sup_{\substack{\mu > 1 \\ n_k > 1}} \left\{ \frac{(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)}{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)} \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|f_{n_k}|} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma_0 \right) \frac{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)}{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)} + \frac{1+a}{b} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\mu \cos \gamma + a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{1+a}{b} \right) + \\
& + \log(2\mu \cos \gamma - 1) - \frac{1}{2} \log \frac{(2\mu \cos \gamma + a)^2 + b^2}{(1+a)^2 + b^2} + \frac{\mu |\sin \gamma|}{\mu \cos \gamma - 1} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \right. \\
& \left. - \operatorname{arctg} \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma|(2\mu \cos \gamma - 1)} \right) \Bigg\}.
\end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{\mu > t \\ n_k > 1}} \left\{ \lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma) + |\operatorname{tg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} 2\gamma| \right) \right] - \frac{1}{n_k} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t) dt}{(t+a)^2 + b^2} \right\} \leq \\
& \leq \frac{1}{2 \cos^2 \gamma} \log \frac{1}{\rho} + \frac{\varepsilon}{2 \cos^2 \gamma} + \log(2 \cos \gamma) + |\operatorname{tg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} 2\gamma| \right) + \\
& + |\operatorname{ctg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} \gamma| \right).
\end{aligned} \quad (15)$$

Устремляя здесь ε к нулю, получим противоречие предположению теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что элемент (1) допускает ограниченное аналитическое продолжение f в угол $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$. Тогда, используя лемму, построим для ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n z^{n-1} = \frac{f(-z) - f_0}{z}$$

соответствующую ему функцию Φ . Применяя к функции $\phi_k(\zeta) = \varphi(n_k \zeta e^{i\gamma})$ рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 1, мы получим соотношение (8) и оценку (10) для интеграла J . Сумму Σ в левой части (8) оценим снизу несколько иначе.

Из формулы (7) легко следует, что при условии $|\gamma| < \pi/6$ функция

$$g_\mu(t e^{-i\gamma}) - \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)^2}{t(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \quad (16)$$

монотонно убывает на промежутке $t \in (1, 2\mu \cos \gamma]$ для достаточно больших μ .

Следовательно,

$$g_\mu(t e^{-i\gamma}) \geq \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\mu \cos \gamma} \right) \quad (17)$$

при $t \in (1, 2\mu \cos \gamma]$, так что, учитывая, что сумму можем записать в виде интеграла Стильтеса

$$\Sigma = \sum_{n_k} g_\mu(t_{n_k}) = \int_1^{2\mu \cos \gamma} g_\mu(t e^{-i\gamma}) dm(t),$$

отсюда и из (17) имеем

$$\Sigma \geq \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{m(t)}{t^2} dt. \quad (18)$$

Поэтому из (11) следует

$$\Sigma \geq \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \times \\ \times \left[n_k \log(2\mu \cos \gamma) - \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t)}{t^2} dt - (n_k + 2) \left(1 - \frac{1}{2\mu \cos \gamma} \right) \right]. \quad (19)$$

Умножая (8) на $(2n_k)^{-1}$, учитывая (10), (19) и оценку

$$\frac{1}{n_k} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t)}{t^2} dt \leq S_Q^\gamma(n_k, \mu),$$

получим

$$\frac{1}{2n_k} \log |f_{n_k}| + \frac{(\mu \cos \gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left[\log(2\mu \cos \gamma) - S_Q^\gamma(n_k, \mu) - \left(1 + \frac{2}{n_k} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{1}{2\mu \cos \gamma} \right) \right] \leq (1 - \lambda) \left\{ \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \log(2\mu \cos \gamma - 1) + \right. \\ \left. + \frac{\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \left[\operatorname{arctg} \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \operatorname{arctg} \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right] \right\} + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_0(n_k),$$

где $\gamma_0(n_k) \rightarrow 0$ и не зависит от μ . Следовательно,

$$\sup_{\substack{\mu > 1 \\ n_k > 1}} \left\{ \lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma - 1) + \frac{\mu |\sin \gamma|}{\mu \cos \gamma - 1} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right) \right] - \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)}{2\mu \cos \gamma - 1} S_Q^\gamma(n_k, \mu) \right\} \leq \\ \leq \sup_{\substack{\mu > 1 \\ n_k > 1}} \left[\frac{(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)}{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)} \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|f_{n_k}|} + \right. \\ \left. + \frac{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)}{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma_0 \right) + \frac{\mu |\sin \gamma|}{\mu \cos \gamma - 1} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right) + \log(2\mu \cos \gamma - 1) - \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)}{2\mu \cos \gamma - 1} \log(2\mu \cos \gamma) + \right. \\ \left. + \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)}{2\mu \cos \gamma - 1} \left(1 + \frac{2}{n_k} \right) \left(1 - \frac{1}{2\mu \cos \gamma} \right) \right],$$

откуда имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\mu > t \\ n_k > 1}} \left\{ \lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma) + |\operatorname{tg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} 2\gamma| \right) \right] - S_Q^\gamma(n_k, \mu) \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{2 \cos^2 \gamma} \log \frac{1}{\rho} + \frac{\varepsilon}{2 \cos^2 \gamma} + 1 + |\operatorname{tg} \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} |\operatorname{ctg} 2\gamma| \right).$$

Устремляя здесь ε к нулю, получим противоречие с предположением теоремы 2.

Кафедра теории функций

Поступила 28.12.2000

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарибян Т. Л. – Изв. НАН Армении. Матем., 1999, т. 34, № 5, с. 1–8.
2. Яврян А. В. – Изв. НАН Армении. Матем., 1997, т. 32, № 5, с. 62–75.
3. Аракелян Н. У., Мартиросян В. А. – Изв. АН Арм. ССР. Матем., 1987, т. 22, № 1, с. 3–21.

S.L. GHARIBIAN

ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ՍՊԻՐԱԼԱՅԻՆ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՂԱՅՆԱՅՈՒՄԸ: II

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է աստիճանային շարքի եզակիությունների տեղայնացումը, որոնք ընկած են նրա զուգամիտության շրջանից դուրս և նախօրոք տրված սպիրալային անկյան վրա: Դիտարկվում են ինչպես վերջավոր, այնպես էլ անվերջ եզակիություններ:

T.L. GHARIBIAN

ON LOCATION OF SPIRAL SINGULARITIES OF POWER SERIES. II

Summary

In this paper problems on location of singularities of power series are investigated which lie outside of its circle of convergence and on prescribed spiral angle. Finite as well as infinite singularities are considered.