ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2001 Естественные науки

Математика

УДК 515.122.6

П.С. ГЕВОРКЯН

ОБ ЭКВИВАРИАНТНОЙ ПОДВИЖНОСТИ ПЛОСКИХ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ

В настоящей статье изучается эквивариантная подвижность плоских инвариантных компактов. Доказывается, что при линейном действии связанной компактной группы G на плоскости любой плоский инвариантный компакт эквивариантно подвижен.

В теории шейпов понятие подвижности для метризуемых компактов было введено К. Борсуком [1]. Им же было доказано, что произвольный плоский компакт подвижен [2].

Класс всех метризуемых пространств обозначим через M, а класс всех метризуемых пространств с непрерывным действием некоторой топологической группы G – через M_G.

Пусть Y – некоторое G-пространство*. Если Y является абсолютным ретрактом для класса всех метризуемых G-пространств $(Y \in AR(M_G))$, то следуя К. Борсуку [1], для его компактных, инвариантных подмножеств понятие эквивариантной подвижности можно определить следующим образом:

Определение 1. Компактное, инвариантное подмножество $X \subset \subset Y \in AR(M_G)$ называется эквивариантно подвижным, если выполняется следующее условие:

Для каждой инвариантной окрестности U компакта X (в Y) существует такая инвариантная окрестность V компакта X (в Y), что для каждой инвариантной окрестности W компакта X (в Y) существует такая эквивариантная гомотопия $\varphi_W : V \times I \mapsto U$, что

$$\varphi_W(x,0) = x, \quad \varphi_W(x,1) \in W \tag{1}$$

для произвольного $x \in V$.

Предложение 1. Пусть компактная связная группа G действует ортогонально и нетривиально на плоскости R^2. Тогда орбита произвольной точки плоскости является проходящей через эту точку окружности с центром в начале координат.

Доказательство. Рассмотрим нетривиальное ортогональное действие компактной связной группы G на R^2. Ортогональность действия означает,

* Всюду под пространством предполагается метризуемое пространство.

что
$$|x| = |gx| \tag{2}$$
для всех $g \in G$ и $x \in R^2$.

В силу связности и компактности группы G орбиты точек плоскости также будут связными и компактными. А поскольку действие группы G ортогонально (см.[2]), следовательно, орбита $[x_0]$ произвольной точки $x_0 \in R^2$, $x_0 \neq 0$, к тому же лежит на окружности $x^2 + y^2 = |x_0|^2$. Таким образом орбита точки $x_0 \neq 0$ является компактным и связным подмножеством окружности $x^2 + y^2 = |x_0|^2$. Теперь нетрудно заметить, что утверждение предложения следует из последнего замечания, а также из непрерывности и нетривиальности действия группы G на плоскости. □

Следствие 1. Плоские инвариантные континуумы при нетривиальном ортогональном действии компактной связной группы G на R^2 могут быть следующих трех видов:

1) точкой (начало координат),
2) окружностями с центром в начале координат,
3) замкнутыми кольцами с центром в начале координат.

Следствие 2. Связные открытые инвариантные подмножества плоскости при нетривиальном ортогональном действии компактной связной группы G на R^2 суть открытые кольца с центром в начале координат.

Теорема 1. Всякий плоский инвариантный континуум при ортогональном действии компактной связной группы G на R^2 эквивариантно подвижен.

Доказательство. В силу следствия 1 достаточно доказать эквивариантную подвижность замкнутых колец. Рассмотрим замкнутое кольцо $D = \{z \in R^2;\ r \le |z| \le R\}$. Пусть $U \supset D$ – произвольная инвариантная окрестность кольца D. Ясно, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что открытое кольцо $V = \{z \in R^2;\ r_0 = r - \varepsilon < |z| < R + \varepsilon = R_0\}$ лежит в U и содержит $D: D \subset V \subset U$. Оказывается, что V – искомая инвариантная окрестность кольца D. То есть мы должны доказать, что V эквивариантно стягивается (в U) в любую инвариантную окрестность кольца D. А для этого достаточно доказать, что V эквивариантно стягивается в любое открытое кольцо $W = \{z \in R^2;\ r_0 < a < |z| < b < R_0\}$, которое, очевидно, содержит в себе $D: D \subset W$. Эквивариантную гомотопию $F: V \times I \mapsto U$, стягивающую V в W, зададим формулой
$$F(z, t) = \frac{z}{R_0 - r_0}\left\{\frac{(bt + (1-t)R_0)(|z| - r_0)}{R_0} - \frac{(at + (1-t)r_0)(|z| - R_0)}{r_0}\right\}.$$
Эквивариантность гомотопии F проверяется непосредственно
$$F(gz, t) = \frac{gz}{R_0 - r_0}\left\{\frac{(bt + (1-t)R_0)(|gz| - r_0)}{R_0} - \frac{(at + (1-t)r_0)(|gz| - R_0)}{r_0}\right\} =$$

$$= \frac{gz}{R_0 - r_0}\left\{\frac{(bt+(1-t)R_0)(|z|-r_0)}{R_0} - \frac{(at+(1-t)r_0)(|z|-R_0)}{r_0}\right\} = gF(z,t).$$

Осталось заметить, что $F(z,0) = z$ и $F(z,1) \in W$. В самом деле,

$$F(z,0) = \frac{z}{R_0 - r_0}\left\{\frac{R_0(|z|-r_0)}{R_0} - \frac{r_0(|z|-R_0)}{r_0}\right\} =$$

$$= \frac{z}{R_0 - r_0}\left\{(|z| - r_0 - |z| + R_0)\right\} = \frac{z}{R_0 - r_0}(R_0 - r_0) = z,$$

$$F(z,1) = \frac{z}{R_0 - r_0}\left\{\frac{b(|z|-r_0)}{R_0} - \frac{a(|z|-R_0)}{r_0}\right\} \in W.$$

□

Теорема 2. Всякий плоский инвариантный континуум при линейном действии компактной связанной группы G на R^2 эквивариантно подвижен.

Доказательство. Оно непосредственно следует из теоремы 1 и следующей известной теоремы (см. [3]). □

Теорема 3. Каждое представление компактной группы G на n-мерном вещественном векторном пространстве L эквивалентно* ортогональному представлению группы на R^n.

Теорема 4. Пусть G – компактная связная группа. Если всякая компонента компактного G-пространства X эквивариантно подвижна, то G-пространство X также эквивариантно подвижно.

Доказательство. Пусть X – компактное подвижное G-пространство. Предположим, что X – инвариантное подмножество некоторого AR(MG)-пространства Y. Компоненты связности компактного G-пространства X обозначим через X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – некоторое множество индексов. Так как G – компактная связная группа, следовательно, каждая компонента связности X_α является инвариантным множеством. Рассмотрим произвольную инвариантную окрестность U компакта X в Y. Так как компонента связности X_α эквивариантно подвижна, то, следовательно, для инвариантной окрестности $U \supset X_\alpha$ существует такая инвариантная окрестность V_α инвариантного множества X_α, что для любой другой инвариантной окрестности W_α множества X_α существует эквивариантная гомотопия

$$\varphi_t^{\alpha, W_\alpha} : V_\alpha \mapsto U,\ 0 \le t \le 1,$$

удовлетворяющая условиям

$$\varphi_0^{\alpha, W_\alpha} = 1_{V_\alpha} \text{ и } \varphi_1^{\alpha, W_\alpha} \subset W_\alpha. \tag{3}$$

Притом нетрудно заметить, что инвариантную окрестность V_α можно было подобрать таким образом, чтобы выполнялось условие $V_\alpha \cap X = X_\alpha$. Очевидно, что для произвольного $\alpha \in \mathcal{A}$ найденные таким образом инвариант-

---

* Два представления $\varphi, \psi : G \mapsto GL(n,R)$ называются эквивалентными, если существует такая матрица $A \in GL(n,R)$, что $\psi(g) = A^{-1}\varphi(g)A$ для всех $g \in G$.

ные окрестности V_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, составляют инвариантное покрытие компактного G-пространства X. Стало быть, из этого покрытия в силу компактности можно выделить конечное подпокрытие $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots, V_{\alpha_n}$. Теперь обозначим

$$V_1 = V_{\alpha_1};\ V_2 = V_{\alpha_2} \setminus \overline{V}_1;\ \dots;\ V_n = V_{\alpha_n} \setminus \overline{\bigcup_{k=1}^{n-1} V_k}.$$

Очевидно, что инвариантные окрестности $V_1, V_2, \dots, V_n$ по-прежнему составляют покрытие компактного G-пространства X, причем они попарно не пересекаются. Обозначим

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i.$$

V – инвариантная окрестность G-компакта X. Докажем, что она искомая окрестность для эквивариантной подвижности X. Для этого рассмотрим произвольную инвариантную окрестность $W \supset X$. Эквивариантную гомотопию $\varphi_t : V \mapsto U$ определим следующим образом:

$$\varphi_t(x) = \varphi_t^{\alpha_i, W}(x),$$

если $x \in V_i$, $i = 1, \dots, n$. Осталось заметить, что

$$\varphi_0 = 1_V,\ \varphi_1(V) \subset W.$$

В самом деле, из условия 3 следует, что $\varphi_0 = \varphi_0^{\alpha_i, W} = 1_{V_i}$ для всех i=1,…,n. А это значит, что $\varphi_0 = 1_V$, $\varphi_1(V_i) = \varphi_1^{\alpha_i, W}(V_i) \subset W$ для всех $i = 1, \dots, n$. Из этого следует, что $\varphi_1(V) \subset W$. □

Из теорем 2 и 4 непосредственно следует

Теорема 5. Всякий плоский инвариантный компакт при линейном действии компактной связной группы G эквивариантно подвижен.

МГУ, ЕГУ

Поступила 03. 07. 2001

ЛИТЕРАТУРА

1. **Borsuk K.** – Fund. Math., 1969, v. 66, N 1, p. 137–146.
2. **Борсук К.** Теория шейпов. М.: Мир, 1976.
3. **Бредон Г.** Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Мир, 1980.

Պ.Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՀԱՐԹ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏ ԿՈՄՊԱԿՏՆԵՐԻ ԷԿՎԻՎԱՐԻԱՆՏ ՇԱՐԺՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Շարժուն մետրիկական կոմպակտների գաղափարը սահմանել է Կ. Բորսուկը: Նա միաժամանակ ապացուցել է, որ յուրաքանչյուր հարթ կոմպակտ

շարժուն է։ Հոդվածում ուսումնասիրվում է հարթ ինվարիանտ կոմպակտների էկվիվարիանտ շարժունությունը։ Ապացուցվում է, որ եթե հարթության վրա տրված է կապակցված և կոմպակտ խմբի գծային գործողություն, ապա այդ դեպքում յուրաքանչյուր հարթ ինվարիանտ կոմպակտ էկվիվարիանտ շարժուն է։

P.S. GEVORGIAN

ON EQUIVARIANT MOVABILITY OF PLANE INVARIANT COMPACTS

Summary

The notion of movability was itroduced, for metrizable compacts, by K. Borsuk. He proved that thc any plane compact is a movable. In this paper thc equivariant movability of plane invariant compacts is studied. It is provcd that all plane invariant compacts are equivariant movable in the case of linear action of compact and connected group G on the plane.