ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2001 Естественные науки

Математика

УДК 518.9

А.Г. МАТЕВОСЯН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ С m ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Исследуется задача сближения с m целевыми множествами, когда движение системы описывается системой линейных стохастических дифференциальных уравнений. Экстремальная стратегия строится методом экстремального прицеливания.

Рассмотрим стохастическую дифференциальную игру при m целевых множествах для линейных систем. В работах [1,2] изучены такие стохастические дифференциальные игры, где источником случайных событий являются ошибки измерений. Здесь мы рассмотрим такую дифференциальную игру, где движение системы описывается стохастическими дифференциальными уравнениями.

1.Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$dx(t)=A(t)x(t)dt+B(t)udV+C(t)vdV, \tag{1.1}$$

где $A(t), B(t), C(t)$ – $(n\times n), (n\times p), (n\times q)$ матрицы с измеримыми и ограниченными элементами при

$$t\in[t_0,T], u\in P\subset R^p, v\in Q\subset R^q,$$

а P и Q – заданные компакты, $V(t)$ – стохастически непрерывный, случайный процесс в вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{I},P)$.

Предположим, что заданы некоторые замкнутые и ограниченные множества $M_k, k\in I=(1,\dots,m)$ в евклидовом пространстве R^{n+1}. Пусть также заданы моменты времени $\{\vartheta_k\}$ такие, что $t\le\vartheta_1<\dots<\vartheta_m\le T$. Предположим, что проекция множества M_k на ось t содержит точку ϑ_k, т.е.

$$M_k\cap[(t,x):t=\vartheta_k, x\in R^n]=M_k(\vartheta_k)\neq\varnothing, k\in I.$$

Пусть $M_k(\vartheta_k)$ – выпуклые, замкнутые и ограниченные множества в пространстве R^n.

Рассмотрим задачу сближения с множествами $M_k(\vartheta_k)$ в моменты ϑ_k.

Согласно [3], решение системы (1.1) п.н. непрерывно для каждого t,

$t_0 \le t \le T$, и – $\mathfrak{I}_t$ измеримый случайный процесс, определяемый формулой

$$x(t) = X[t,t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X[t,\tau]B(\tau)udV + \int_{t_0}^{t} X[t,\tau]C(\tau)vdV, \tag{1.2}$$

где последние два интеграла следует понимать как стохастический интеграл по процессу $V(t)$, а $X[t,\tau]$ – нормированная фундаментальная матрица с абсолютно непрерывными элементами.

Имея в виду формулу решения (1.2), для уравнения (1.1) поставим следующую задачу.

Задача. Требуется найти стратегию $U_0 + u_0(t)$, которая обеспечивает встречи $x[\vartheta_k, t_0, x_0, u_0] \in M_k(\vartheta_k)$ п.н. $(k \in I)$.

Предположим, что для процессов $V(t)$ выполнено следующее условие: $V(t) - V(t_0) \ge 0$ при $t - t_0 > 0$ (напр., пуассоновский процесс).

Используя приведенные в [4] и [5] для m целевых множеств рассуждения для детерминированных, линейных систем, можно построить гипотетическое рассогласование, которое в нашем случае будет стохастическим,

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(t_*, x_*, x_1, x_{l-1}, \{\vartheta_k\}) = \max_{\|l\| \le 1}\Bigg[&\sum_{k=1}^{l-1} l'_k x_k + \sum_{k=l}^{l-1} \min_{-p_k \in M_k} l'_k p_k + \sum_{k=1}^{m} l'_k \overline{X}[\vartheta_k, t_*]x_* + \\ &+ \int_{t_*}^{\vartheta_m} \min_{u \in P} \sum_{k=1}^{m} l'_k \overline{\overline{X}}[\vartheta_k,\tau]B(\tau)udV + \int_{t_*}^{\vartheta_m} \max_{v \in Q} \sum_{k=1}^{m} l'_k \overline{\overline{X}}[\vartheta_k,\tau]C(\tau)vdV + \sum_{k=l}^{m} \min_{-p_k \in M_k} l'_k p_k\Bigg]\end{aligned} \tag{1.3}$$

и $\varepsilon_0(t_*, x_*, x_1, x_{l-1}, \{\vartheta_k\}) = 0$, если правая часть в (1.3) отрицательна.

Здесь $\{t_*, x_*\}, (t_* \in [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l))$ — начальное положение системы (1.1), а матрицы $\overline{X}[t,\tau]$ и $\overline{\overline{X}}[t,\tau]$ определяются следующим образом:

$$\overline{X}[t,\tau] = \begin{cases} X[t,\tau], & t \ge \tau, \\ E, & t \le \tau; \end{cases} \qquad \overline{\overline{X}}[t,\tau] = \begin{cases} X[t,\tau], & t > \tau, \\ 0, & t \le \tau. \end{cases}$$

Из формулы (1.3) вытекает справедливость следующего утверждения.

Если $\varepsilon_0(t, x(t), \{\vartheta_k\}) = 0$ п.н. при $t \in [t_0, \vartheta_m]$, то для всех $k \in I$ $x(\vartheta_k) \in M_k$ п.н.

Скажем, что ситуация для задачи регулярна, если максимум в правой части (1.3) достигается на единственном векторе $\{l_k^0\}$.

Вследствие единственности максимизирующего вектора $l^0 = \{l_k^0\}$, он изменяется непрерывно с изменением позиции $\{t_*, x_*\}$, $(t \in [\vartheta_{k-1}, \vartheta_k))$.

Предположим, что $\int_t^{t+\Delta t} \gamma(\tau)dV$ можно представить в следующем виде:

$$\int_t^{t+\Delta t} \gamma(\tau)dV = \gamma(t)\beta(\Delta t)\Delta t,$$

где $\gamma(t)$ – измеримая ограниченная функция, а $\beta(\Delta t)$ остается ограниченным, когда $\Delta t \to 0$.

Теми же способами, что и в [4], можно получить, что приращение $\Delta\varepsilon_0$

на малом интервале Δt изменения аргумента t будет удовлетворять следующей оценке:

$$\Delta\varepsilon_0 \le \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \overline{\overline{X}}[\vartheta_k, t]B(t)u\beta(\Delta t)\Delta t - \min_{u\in P} \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \overline{\overline{X}}[\vartheta_k, t]B(t)u\beta(\Delta t)\Delta t +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \overline{\overline{X}}[\vartheta_k, t]C(t)v\beta(\Delta t)\Delta t - \max_{v\in Q} \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \overline{\overline{X}}[\vartheta_k, t]C(t)v\beta(\Delta t)\Delta t + o(\Delta t), \quad (1.4)$$

где $\beta(\Delta t)$ остается ограниченным, когда $\Delta t \to 0$.

После этого из оценки (1.4) можно установить, что когда $\Delta t \ge 0$, то $\Delta\varepsilon_0 \le 0$, если первый игрок выбирает экстремальную стратегию из следующего условия минимума:

$$\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \overline{\overline{X}}[\vartheta_k, t]B(t)u_0\beta(t) = \min_{u\in P} \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \overline{\overline{X}}[\vartheta_k, t]B(t)u\beta(t). \quad (1.5)$$

Таким образом, используя приведенные в [4,5] соображения, приходим к следующему выводу.

Теорема 1. Пусть для всех $t \in [t_0, \vartheta_m)$ ситуация для задачи регулярна. Тогда экстремальная стратегия $U_0 \div u_0(t)$, определяемая при $\varepsilon_0(t,x) > 0$ условием (1.5), а при $\varepsilon_0(t,x) = 0$ – любым допустимым управлением $u \in P$, обеспечит встречи $x(\vartheta_k, u_0) \in M_k$ п.н., если только $\varepsilon_0(t_0, x_0\{\vartheta_k\}) = 0$ п.н.

2. Распространим построение стратегии экстремального прицеливания $U_0 \div u_0(t,x)$ на случай задачи сближения с множествами M_k к моментам ϑ_k. Будем полагать, что множества $M_k(t)$ ограничены, замкнуты, выпуклы и зависят от t непрерывным образом. Нам необходимо новое определение регулярности такой задачи. Скажем, что ситуация является вполне регулярной в области

$$G = U[G_i : i \in I],$$
$$G_1 = [(t,x): t_0 \le t \le \vartheta_1, 0 \le \varepsilon_0(t, x\{\tau_k^0\}) \le \beta],$$
$$G_2 = [(t,x): \vartheta_1 \le t \le \vartheta_2, 0 \le \varepsilon_0(t, x\{\tau_k^0\}) \le \beta, (t_1, x_1) \in G_1],$$
$$- -$$
$$G_m = [(t,x): \vartheta_{m-1} \le t \le \vartheta_m, (t_1, x_1) \in G_1, \ldots, (t_{m-1}, x_{m-1}) \in G_{m-1},$$
$$0 \le \varepsilon_0(t, x, x_1, \ldots, x_{m-1}, t_1, \ldots, t_{m-1}, \tau_m^0) \le \beta], \quad \beta > 0,$$

если для каждой позиции $(t_*, x_*) \in G_l, t_0 \in [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l)$ и набора (t_α, x_α), $\alpha = 1, \ldots, l-1$ существует единственный набор $(\tau_1^0, \ldots, \tau_m^0)$, удовлетворяющий равенству

$$\min_{\{\tau_k \in [\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]\}} \varepsilon_0(\cdot) = \varepsilon_0(t_*, x_*, x_1, \ldots, x_{l-1}, t_1, \ldots, t_{l-1}, \{\tau_k^0\}) \quad (2.1)$$

при $l \le k \le m$ и максимизирующий вектор $\{l_k^0(t_*, x_*, \{\tau_k^0\})\}$ в $\varepsilon_0(\cdot)$ – единственный. Пользуясь соображениями [4,5], приходим к следующему выводу.

Теорема 2. Пусть ситуация для задачи сближения с множествами

M_k к моментам ϑ_k вполне регулярна. Тогда экстремальная стратегия $U_0 \div u_0(t,x)$, определяемая следующим условием минимума –

$$\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \overline{\overline{X}}\left[\tau_k^0, t\right] B(t) u_0 \beta(t) = \min_{u \in P} \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \overline{\overline{X}}\left[\tau_k^0, t\right] B(t) u \beta(t), \tag{2.2}$$

обеспечит условие $x\left[\tau_k^0\right] \in M_k\left(\tau_k^0\right)$ п.н. $k \in I$ при некоторых $\tau_k^0 \in \left[t_0, \vartheta_k\right] \cap \left[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k\right]$, если только $\varepsilon_0\left(t_0, x_0, \left\{\tau_k^0\right\}\right) = 0$ п. н.

Автор выражает искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Габриеляну М.С. за постоянное внимание к работе, а также за множество полезных советов и замечаний.

Кафедра теоретической механики *Поступила 14.02.2001*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габриелян М.С., Барсегян В.Р., Симонян Т.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1996, №1, с. 10–15.
2. **Габриелян М.С., Барсегян В.Р.** – Ученые записки ЕГУ, 1994, №2, с. 29–39.
3. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
4. **Красовский Н.Н., Суботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1971.
5. **Габриелян М.С.** Дифференциальные игры при m целевых множествах: Автореферат на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Ер., ЕГУ, 1986.

Ա.Գ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ m ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂ

Ամփոփում

Դիտարկված է m նպատակային բազմությունների հետ մոտեցման խնդիրը, երբ համակարգի շարժումը նկարագրված է ստոխաստիկ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով: Էքստրեմալ ստրատեգիան կառուցվում է էքստրեմալ նշանառության եղանակով:

A.G. MATEVOSIAN

DIFFERENTIAL RAPPROCHEMENT GAME WITH m TARGET SETS FOR STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS

Summary

Problem of rapprochement with *m* target sets is considered, when the movement of system is described by the system of linear stochastic differential equations. The extremal strategy is constructed by a method of extremal aiming.