ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2001 Естественные науки

Математика

УДК 514.75

В.А. НЕРСЕСЯН

ДОПУСТИМЫЕ КОМПЛЕКСЫ ТРЕХМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^6 (I)

В работе изучаются допустимые комплексы трехмерных плоскостей в шестимерном проективном пространстве P^6. Доказывается, что однопараметрическое семейство конусов второго порядка в P^6 с одномерной вершиной и трехмерными плоскими образующими определяет четырехпараметрическое семейство плоскостей E^3, которыми являются все трехмерные образующие к этим конусам.

I. Пусть $\mathbf{P}^n$ – n-мерное проективное пространство, $H_{n,k}$ – многообразие k-мерных плоскостей пространства $\mathbf{P}^n$. a-мерное подмногообразие K в $H_{n,k}$ назовем комплексом k-мерных плоскостей, если a>n–k. Пусть K_Q – конус, образованный k-мерными плоскостями $h\in K$, проходящими через точку $Q\in \mathbf{P}^n$. Будем считать, что размерность конуса K_Q меньше n.

Определение. Комплекс K назовем допустимым, если для всех плоскостей $h\in K$ и нефокальных точек $Q\in \mathbf{P}^n (Q\in h)$ касательная плоскость в любой нефокальной точке к конусу K_Q, содержащая h, определена единственным образом и зависит только от h.

Эти касательные плоскости назовем касательными вдоль плоскости h к конусу K_Q и обозначим через π (h).

В работах [1–3] при a = n определены, классифицированы и геометрически описаны допустимые комплексы двумерных плоскостей при n = 5 и n = 6.

В работе [4] некоторые результаты из [1–3] обобщены на n-мерный случай для произвольного $k \geq 2$.

В настоящей работе изучаются допустимые комплексы трехмерных плоскостей в проективном пространстве $\mathbf{P}^6$.

Наш выбор условий допустимости комплекса и самого этого термина объясняется тем, что допустимые комплексы прямых пространства C^n, употребляемые в интегральной геометрии Гельфанда и Граева (см. [5–7]), при переходе в вещественное пространство $\mathbf{R}^{2n}$ дают подкласс допустимых в нашем смысле комплексов двумерных плоскостей [8].

Заметим, что имеются и другие определения, неэквивалентные нашим, допустимых комплексов k-мерных плоскостей (см. [9-11]).

Работа выполнена методом подвижного репера и внешних форм Картана [12].

2. Пусть P^6 – шестимерное проективное пространство, $\{A_0,\ldots,A_6\}$ – репер в пространстве P^6. Уравнения инфинитезимального перемещения репера в пространстве P^6 имеют вид

$$dA_i = \omega_i^j A_j, \qquad i, j, l = 0,\ldots,6,$$

где формы ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_i^j = \omega_i^l \wedge \omega_l^j.$$

Главными на семействе трехмерных плоскостей, натянутых на точки A_0, A_N, A_3, являются формы

$$\omega_0^4, \omega_0^\alpha, \omega_N^4, \omega_N^\alpha, \omega_3^4, \omega_3^\alpha, \quad \alpha,\beta = 5;6, \qquad N = 1;2,$$

а на семействе четырехмерных плоскостей, натянутых на точки A_0, A_ξ, – формы

$$\omega_0^\alpha, \omega_\xi^\alpha, \qquad \xi = 1;2;3;4.$$

Пусть K – четырехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей E^3. Точку $Q \in P^6$ назовем нефокальной, если через нее проходит однопараметрическое семейство трехмерных плоскостей E^3, т.е. конус K_Q четырехмерный. Пусть семейство K допустимое. Обозначим через $\pi(E^3)$ касательную плоскость к семейству K вдоль плоскости E^3, а через π – семейство плоскостей $\pi(E^3)$. Канонизируем репер так, чтобы точки A_0, A_N, $A_3 \in E^3$, а A_0, $A_\xi \in \pi(E^3)$. Будем считать, что формы ω_0^5, ω_1^6 линейно независимые. Тогда формы $\omega_0^5, \omega_1^6, \omega_4^\alpha$ образуют базис на семействе π. Условие допустимости семейства K означает, что на выбранном семействе реперов выполняются уравнения (см. [4])

$$\begin{cases} \omega_N^5 = A_{N5}^{50} \wedge \omega_0^5 + A_{N6}^{51}\omega_1^6 + A_{N\alpha}^{54}\omega_4^\alpha, \omega_0^6 = A_{05}^{60}\omega_0^5 + A_{06}^{61}\omega_1^6 + A_{0\alpha}^{64}\omega_4^\alpha, \\ \omega_2^6 = A_{25}^{60} \wedge \omega_0^5 + A_{26}^{61}\omega_1^6 + A_{2\alpha}^{64}\omega_4^\alpha, \omega_3^\alpha = A_{35}^{\alpha 0}\omega_0^5 + A_{36}^{\alpha 1}\omega_1^6 + A_{3\beta}^{\alpha 4}\omega_4^\beta. \end{cases} \tag{1}$$

Если продифференцировать уравнения (1) внешним образом, то получим,

что
$$\begin{cases} \Delta A_{N5}^{50} \wedge \omega_0^5 + \Delta A_{N6}^{51} \wedge \omega_1^6 + \Delta A_{N\alpha}^{54} \wedge \omega_4^\alpha = 0, \\ \Delta A_{35}^{\alpha 0} \wedge \omega_0^5 + \Delta A_{36}^{\alpha 1} \wedge \omega_1^6 + \Delta A_{3\beta}^{\alpha 4} \wedge \omega_4^\beta = 0, \\ \Delta A_{05}^{60} \wedge \omega_0^5 + \Delta A_{06}^{61} \wedge \omega_1^6 + \Delta A_{0\alpha}^{64} \wedge \omega_4^\alpha = 0, \\ \Delta A_{25}^{60} \wedge \omega_0^5 + \Delta A_{26}^{61} \wedge \omega_1^6 + \Delta A_{2\alpha}^{64} \wedge \omega_4^\alpha = 0, \end{cases}$$

где формы $\Delta A_{N5}^{50}, \Delta A_{N6}^{51}, \ldots, \Delta A_{26}^{61}, \Delta A_{2\alpha}^{64}$ являются ковариантными дифференциалами указанных функций. Из выражений для этих форм видно, что репер $\{A_0,\ldots,A_6\}$ можно канонизировать так, чтобы уравнения (1) приняли вид

$$\omega_1^5 = 0, \ \ \omega_2^5 = A_{16}^{51}\omega_1^6, \quad \omega_3^5 = 0, \quad \omega_0^6 = 0, \quad \omega_2^6 = 0, \quad \omega_3^6 = A_{35}^{60}\omega_0^5. \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда $A_{16}^{51} \neq 0, A_{35}^{60} \neq 0$. Выражения для форм $\Delta A_{16}^{51}, \Delta A_{35}^{60}$ показывают, что репер можно канонизировать так, что $A_{16}^{51} = 1, A_{35}^{60} = 1$. Тогда уравнения (2) примут вид

$$\begin{cases}\omega_1^5=0,\omega_2^5=\omega_1^6,\omega_3^5=0,\\ \omega_0^6=0,\omega_2^6=0,\omega_3^6=\omega_0^5.\end{cases} \tag{3}$$

Дифференцируя уравнения (3) внешним образом и раскрывая по лемме Картана, получим, что

$$\begin{cases}\omega_1^0=m\omega_0^5+n\omega_1^6+l\omega_4^5,\omega_1^2-\omega_6^5=n\omega_0^5+g\omega_1^6+s\omega_4^5,\\ \omega_1^4=l\omega_0^5+s\omega_1^6+q\omega_4^5,\omega_2^0-\omega_1^3=\alpha\omega_0^5+\beta\omega_1^6-C\omega_4^5-l\omega_4^6,\\ \omega_2^2-\omega_5^5-\omega_1^1+\omega_6^6=\beta\omega_0^5+\gamma\omega_1^6+E\omega_4^5-s\omega_4^6,\\ \omega_2^4=C\omega_0^5+E\omega_1^6-q\omega_4^6,\omega_3^0-\omega_6^5=Q\omega_0^5+P\omega_1^6+L\omega_4^5,\\ \omega_3^2=P\omega_0^5+M\omega_1^6+N\omega_4^5,\omega_3^4=L\omega_0^5+N\omega_1^6-p\omega_4^5,\\ \omega_0^3-\omega_5^6=a\omega_0^5+b\omega_1^6+c\omega_4^6,\omega_0^1=b\omega_0^5+t\omega_1^6+h\omega_4^6,\\ \omega_0^4=c\omega_0^5+h\omega_1^6+p\omega_4^6,\omega_2^3=A\omega_0^5+B\omega_1^6+C\omega_4^6,\\ \omega_2^1-\omega_5^6=B\omega_0^5+D\omega_1^6+E\omega_4^6,\omega_3^1-\omega_0^2=\pi\omega_0^5+\mu\omega_1^6-h\omega_4^5+N\omega_4^6,\\ \omega_3^3-\omega_6^6-\omega_0^0+\omega_5^5=\sigma\omega_0^5+\pi\omega_1^6-c\omega_4^5+L\omega_4^6.\end{cases} \tag{4}$$

Выясним геометрический смысл этих уравнений. Для этого сначала продифференцируем формы, которые смещают нашу трехмерную плоскость E^3, т.е. формы $\omega_0^4,\omega_N^4,\omega_3^4$. Получим, что p=1, q=0, c=0, h=0, s=0, E=0, L=0, N=0. Рассмотрим подслучай, когда l=0, C=0. Раскрывая результат дифференцирования уравнений $\omega_0^4=\omega_4^6,\omega_1^4=0,\omega_2^4=0,\omega_3^4=-\omega_4^5$ по лемме Картана, получим уравнения

$$\begin{cases}\omega_5^4+\omega_4^3=a_1\omega_0^5+a_2\omega_1^6+a\omega_4^5+a_3\omega_4^6,\omega_1^3=b_2\omega_1^6+b_3\omega_4^5,\\ \omega_4^1=a_2\omega_0^5+a_4\omega_1^6+b\omega_4^5+a_5\omega_4^6,\omega_2^0=-t_3\omega_1^6-t_4\omega_4^6,\\ 2\omega_4^4-\omega_0^0-\omega_6^6=a_3\omega_0^5+a_5\omega_1^6+a_6\omega_4^6,\omega_6^4=b_1\omega_1^6+b_2\omega_4^5-n\omega_4^6,\\ \omega_5^4=t_1\omega_1^6+B\omega_4^5+t_2\omega_4^6,\omega_4^0-\omega_6^4=U_1\omega_0^5+u_2\omega_1^6+u_3\omega_4^5+Q\omega_4^6,\\ \omega_4^2=u_2\omega_0^5+u_4\omega_1^6+u_5\omega_4^5+P\omega_4^6,2\omega_4^4-\omega_3^3-\omega_5^5=U_3\omega_0^5+u_5\omega_1^6+u_6\omega_4^5,\\ A=0,m=0.\end{cases} \tag{5}$$

Из уравнений (4) и (5), сравнивая выражения для формы $\omega_2^0-\omega_1^3$, находим, что $\alpha=0,b_3=0,t_4=0,\beta=-(t_3+b_2)$. Непосредственная проверка показывает, что уравнение $\omega_1^6=0$ вполне интегрируемое. Полагая в уравнениях (4) и (5) форму $\omega_1^6=0$, мы, в частности, найдем, что

$$\omega_3^0-\omega_6^5=Q\omega_0^5,\omega_0^3-\omega_5^6=a\omega_0^5,\omega_3^3+\omega_5^5-\omega_6^6-\omega_0^0=\sigma\omega_0^5.$$

Продифференцируем эти уравнения внешним образом. Получим, что

$$\begin{cases}\Delta Q\wedge\omega_0^5=0,\Delta a\wedge\omega_0^5+2a\omega_4^5\wedge\omega_4^6=0,\\ \Delta\sigma\wedge\omega_0^5+(a_3-u_3-\sigma)\wedge\omega_4^6\wedge\omega_4^5=0,\end{cases} \tag{6}$$

где $\Delta Q,\Delta a$ – ковариантные дифференциалы указанных функций. Из уравнений (6) имеем a=0, $\sigma=a_3-u_3$. За счет канонизации репера получаем, что Q=0, $\sigma=0$. Но тогда $a_3=u_3$. Применяя к уравнениям (6) лемму Картана и вновь канонизируя репер, мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega_1^0=0, \omega_1^3=0, \omega_1^4=0, \omega_1^5=0, \omega_1^6=0, \omega_2^0=0, \omega_2^3=0, \\ \omega_2^4=0, \omega_2^5=0, \omega_2^6=0, \omega_0^6=0, \omega_6^0=0, \omega_3^5=0, \omega_5^3=0, \\ \omega_3^6=\omega_0^5, \omega_0^4=\omega_4^6, \omega_3^4=-\omega_4^5, \omega_3^0=\omega_6^5, \\ \omega_4^0=\omega_6^5, \omega_0^3=\omega_5^6, \omega_4^3=-\omega_5^4, \omega_6^3=\omega_0^5, 2\omega_4^4-\omega_0^0-\omega_6^6=0, \\ \omega_3^3+\omega_5^5-\omega_6^6-\omega_0^0=0. \end{cases} \tag{7}$$

Непосредственная проверка показывает, что система уравнений (7) вполне интегрируема. Выясним геометрию этих уравнений. Как известно, проективное пространство $\mathbf{P}^6$ получено путем факторизации семимерного пространства V^7 по отношению к коллинеарности. Уравнения (7) – это уравнения на формы смещения проективного репера $\{A_0,\ldots,A_6\}$ или, что то же самое, векторного репера в ~~о~~пределяющем $\mathbf{P}^6$ векторном пространстве V^7. Первые две строки системы (7) показывают, что в проективном пространстве $\mathbf{P}^6$ зафиксирована прямая, проходящая через точки A_1 и A_2. С другой стороны, в векторном пространстве V^7 фиксировано (с точностью до множителя) скалярное произведение, для которого $(A_0, A_6)=(A_3, A_5)=(A_4, A_4)=\lambda\neq 0$, а остальные $(A_i, A_k)=0$. Действительно, если продифференцировать эти равенства внешним образом, то в силу уравнений (7) получим лишь вполне интегрируемое уравнение $d\lambda+\lambda(\omega_0^0+\omega_6^6)=0$.

Итак, в пространстве V^7 определена (с точностью до множителя) метрика (A, B). Множество изотропных векторов этой метрики определяются уравнением (A, A)=0. Пусть $A=x^iA_i$. Тогда множество изотропных векторов этой метрики образует конус, уравнение которого $(x^4)^2+$ $+2x^0x^6+2x^3x^5=0$. Образ этого конуса в проективном пространстве $\mathbf{P}^6$ – конус с одномерной вершиной, проходящей через прямую (A_1A_2). Этот конус имеет трехпараметрическое семейство трехмерных плоских образующих, одной из которых является наша трехмерная плоскость E^3, проходящая через точки A_0, A_1, A_2, A_3 (остальные образующие получаются из нее преобразованиями, оставляющими конус на месте). Эти преобразования выделяются из всех проективных преобразований системой уравнений (7).

Из уравнений (7) видно, что главными на семействе трехмерных плоскостей E^3 являются формы $\omega_0^5, \omega_4^5, \omega_4^6$. Если в трехмерной плоскости E^3 зафиксировать некоторую нефокальную точку $A=x^uA_u, u=0;1;2;3$, т.е. $|x^0|+|x^1|+|x^2|+|x^3|>0$, то тем самым зафиксируется и некоторая четырехмерная плоскость, касательная к вышеуказанному конусу и натянутая на точки A_u, A_4. Если выделено однопараметрическое семейство таких конусов, то через нефокальную точку пространства $\mathbf{P}^6$ пройдет только один такой конус, при этом семейство плоскостей E^3 явится образующим и касательным к конусу.

Итак, трехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей допустимо в нашем смысле, а однопараметрическое – подобных конусов в проективном пространстве $\mathbf{P}^6$ дает четырехпараметрическое допустимое семейство трехмерных плоскостей E^3.

Тем самым доказана следующая

Теорема. Пусть в проективном пространстве $\mathbf{P}^6$ дано однопараметрическое семейство конусов второго порядка с одномерной вершиной и трехмерными плоскими образующими. Оно определяет в пространстве $\mathbf{P}^6$ четырехпараметрическое допустимое семейство трехмерных плоскостей E^3, которыми являются все трехмерные образующие к этим конусам.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 18.01.2001*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нерсесян В.А.** – ДАН Арм.ССР, 1980, т.70, №3, с.151–155.
2. **Нерсесян В.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1981, №1, с.13–18.
3. **Нерсесян В.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1983, №2, с.13–19.
4. **Нерсесян В.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1986, №2, с.34–38.
5. **Гельфанд И.М., Граев М.И.** – Функц. анализ и его приложения. М., 1968, т.2, в.3, с.39–52.
6. **Майус К.** – Там же. М., 1973, т.7, в.1, с.79–81.
7. **Гельфанд И.М., Граев М.И.** – Там же. М., 1991, т.25, в.1, с.1–6.
8. **Нерсесян В.А.** – ДАН Арм.ССР, 1980, т.70, №5, с.280–285.
9. **Кругляков Л.З.** – Функц. анализ и его приложения. М., 1982, т.16, в.3, с.66–67.
10. **Кольцова С.В.** – Функц. анализ, 1977, №9, с.84–92.
11. **Бубякин И.В.** – Функц. анализ и его приложения. М., 1991, т.25, в.3, с.73–76.
12. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.

Վ.Ա ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

ԵՌԱՉԱՓ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹՈՒՅԼԱՏՐԵԼԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍՆԵՐԸ $\mathbf{P}^6$ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ: I

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են եռաչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսները $\mathbf{P}^6$ պրոյեկտիվ տարածության մեջ: Ապացուցվում է, որ միաչափ գագաթով և եռաչափ հարթ ծնիչներով մեկ պարամետրից կախված երկրորդ կարգի կոների ընտանիքը $\mathbf{P}^6$-ում որոշում է չորս պարամետրերից կախված E^3 հարթությունների ընտանիքը, որոնք այդ կոների բոլոր եռաչափ ծնիչներն են:

V.A. NERSESIAN

POSSIBLE COMPLEXES OF THREE-DIMENSIONAL PLANES IN PROJECTIVE SPACE $\mathbf{P}^6$. I

Summary

In the work possible complexes of three-dimensional planes in six-measured projective space $\mathbf{P}^6$ are studied. It's proved that one-parametric family of cones of second order in $\mathbf{P}^6$ with univariate top and with three-dimensional flat forming defines four-parametric possible family of planes E^3 which are all three-dimensional forming to this cones.