

УДК 531.36

Л.А. МАЗМАНЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ

Рассматривается задача устойчивости по действующей силе вращательного движения тяжелого волчка вокруг своей оси симметрии. Показано, что вращательное движение волчка при любой угловой скорости и при любых значениях параметров неустойчиво по действующей силе.

Рассмотрим тяжелый волчок, вращающийся вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью $\dot{\phi}$. Пусть на волчок действуют две внешние силы: сила тяжести P , приложенная к центру масс C волчка, и реакция R_0 опоры O (рис. 1). Положение оси симметрии z волчка относительно неподвижных осей $\xi\eta\zeta$ (ось вертикальна) будем определять углами α и β (рис. 2). За невозмущенное движение волчка примем его равномерное вращение с угловой скоростью $\dot{\phi}_0 = n$ вокруг оси симметрии z , совпадающей с неподвижной вертикальной осью ζ [1]. В невозмущенном движении

$$\alpha = 0, \dot{\alpha} = 0, \beta = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = n = \text{const.} \quad (1)$$

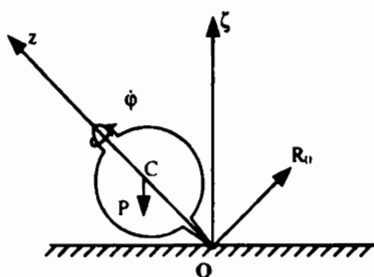


Рис. 1.

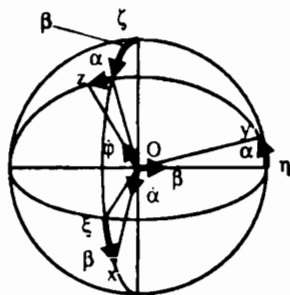


Рис. 2.

В возмущенном движении все эти величины будут меняться.

Введем оси x, y, z (рис. 2) и обозначим через p, q, r проекции угловой скорости ω вращения волчка. Проекции p, q, r определяются равенствами

$$p = \dot{\alpha}, \quad q = \dot{\beta} \cos \alpha, \quad r = \dot{\phi} - \dot{\beta} \sin \alpha. \quad (2)$$

Теперь найдем кинетическую энергию волчка

$$T = \frac{1}{2} I_x (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi} - \dot{\beta} \sin \alpha)^2. \quad (3)$$

Здесь $I_x = I_y$ – экваториальные, а I_z – аксиальный моменты инерции волчка.

Потенциальная энергия волчка будет

$$\Pi = Pl \cos \alpha \cos \beta, \quad (4)$$

где P – вес волчка, l – расстояние от его центра масс C до опоры O .

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = x_1, \quad \dot{\alpha} = x_2, \quad \beta = x_3, \quad \dot{\beta} = x_4, \quad \phi = \phi_0 + x_5. \quad (5)$$

Кинетическая энергия с новыми назначениями будет иметь следующую форму:

$$T = \frac{1}{2} I_x (x_2^2 + x_4^2 \cos^2 x_1) + \frac{1}{2} I_z (x_5 + \phi_0 - x_4 \sin x_1)^2, \quad (6)$$

а потенциальная энергия –

$$\Pi = Pl \cos x_1 \cos x_3. \quad (7)$$

Для выделения дифференциального уравнения возмущенного движения волчка используем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_3}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x_5} \right) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_4^2 \cos x_1 \sin x_1 + \frac{I_z}{I_x} (x_4 \sin x_1 - x_5 - \phi_0) x_4 \cos x_1 + \frac{Pl}{I_x} \sin x_1 \cos x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = 2x_4 \frac{\sin x_1}{\cos x_1} x_2 + \frac{I_z}{I_x} \cdot \frac{1}{\cos x_1} \cdot x_2 (x_5 + \phi_0 - x_4 \sin x_1) + \frac{Pl}{I_x} \cdot \frac{1}{\cos x_1} \sin x_3, \\ \dot{x}_5 = 2x_4 \cdot \frac{\sin^2 x_1}{\cos x_1} \cdot x_2 + \frac{I_z}{I_x} \cdot \frac{\sin x_1}{\cos x_1} \cdot x_2 (x_5 + \phi_0 - x_4 \sin x_1) + \frac{Pl}{I_x} \cdot \frac{\sin x_1}{\cos x_1} \sin x_3 + \\ + x_2 x_4 \cos x_1. \end{cases} \quad (9)$$

Исследуем устойчивость по действующий силе волчка относительно величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Рассматриваемая система допускает три первых интеграла:

1) с постоянной полной энергией системы, т.е. $T + \Pi = \text{const}$;

2) при условии, что координата ϕ циклическая, $\frac{\partial T}{\partial x_5} = \text{const}$ ($x_5 = \phi - \phi_0$).

$-\dot{\phi}_0)$;

3) момент количества движения волчка относительно неподвижной оси ζ постоянный: $K_\zeta = k = \text{const}$. Для того чтобы написать этот интеграл в явном виде, воспользуемся очевидными равенствами:

$$K_x = I_x \dot{p} = I_x \dot{\alpha} = I_x \dot{x}_2, \quad K_y = I_y \dot{q} = I_x \dot{\beta} \cos \alpha = I_x \dot{x}_4 \cos x_1,$$

$$K_z = I_z \dot{r} = I_z (\dot{\phi} - \dot{\beta} \sin \alpha) = I_z (\dot{x}_5 + \dot{\phi}_0 - \dot{x}_4 \sin x_1),$$

$$K_\zeta = K_x \cos(\zeta, x) + K_y \cos(\zeta, y) + K_z \cos(\zeta, z).$$

Пользуясь рис. 2, найдем $\cos(\zeta, x) = -\sin \beta = -\sin x_3$, $\cos(\zeta, y) = \sin \alpha \times \cos \beta = \sin x_1 \cos x_3$, $\cos(\zeta, z) = \cos \alpha \cos \beta = \cos x_1 \cos x_3$.

Таким образом, первые интегралы (9) дифференциальных уравнений возмущенного движения примут вид

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{2} I_x (x_2^2 + x_4^2 \cos^2 x_1) + \frac{1}{2} I_z (\phi_0 + x_5 - x_4 \sin x_1)^2 + Pl \cos x_1 \cos x_3 = h, \\ F_2 = \phi_0 + x_5 - x_4 \sin x_1 = n_1, \\ F_3 = I_x (-x_2 \sin x_3 + x_4 \sin x_1 \cos x_1 \cos x_3) + \\ + I_z (\phi_0 + x_5 - x_4 \sin x_1) \cos x_1 \cos x_3 = k. \end{cases} \quad (10)$$

Так как ни один из этих интегралов не является знакоопределенной функцией, то составим линейную связку интегралов

$$V = F_1 - F_1(0) + \mu [F_2 - F_2(0)] + \lambda [F_3 - F_3(0)], \quad (11)$$

где μ и λ — неопределенные постоянные коэффициенты. Внесем сюда значения F_1, F_2 и F_3 , разложим их в ряд по степеням $x_1, \dots, x_5$ и учтем, что $\phi_0 = n$.

Для того чтобы функция V была знакоопределенной, необходимо прежде всего приравнять к нулю коэффициент при первой степени x_5 . Имеем

$$I_z n + \mu + \lambda I_z = 0. \quad (12)$$

Теперь функция V примет вид

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} a x_1^2 + \frac{1}{2} I_x x_2^2 + \frac{1}{2} a x_3^2 + \frac{1}{2} I_x x_4^2 + \frac{1}{2} I_z x_5^2 + \\ & + \lambda I_x x_1 x_4 - \lambda I_x x_2 x_3 + W(x_1, \dots, x_5), \end{aligned} \quad (13)$$

где $a = -(Pl + \lambda I_z n)$, а $W(x_1, \dots, x_5)$ — члены высшего порядка. Для того чтобы функция V была определенно-положительной, необходимо, чтобы угловая скорость n вращения волчка удовлетворяла следующему условию [1]:

$$I_z^2 n^2 > 4 I_x Pl. \quad (14)$$

Известно [2], что если система нелинейных дифференциальных уравнений допускает определенно-положительный первый интеграл, то ее тривиальное решение неустойчиво по действующей силе. Вышеуказанные рассуждения показывают, что при условии (14) функция V определенно-положительная, т.е. система (9) допускает определенно-положительный первый интеграл. Следовательно, для системы (9) имеет место теорема о неустой-

чивости по действующей силе [2]. Откуда и следует, что рассматриваемое движение волчка неустойчиво по действующей силе.

Если условие (14) не соблюдается, то рассматриваемое вращение волчка становится неустойчивым по Ляпунову, значит, согласно определению устойчивости по действующей силе, оно будет неустойчивым и по действующей силе [3].

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема. Вращательное движение тяжелого волчка вокруг своей оси симметрии всегда неустойчиво по действующей силе.

Кафедра теоретической механики

Поступила 13.04.2001



ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990.
2. Габриелян М. С., Шагинян С. Г. – Ученые Записки ЕГУ, 1989, №1, с. 27–32.
3. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. – Ученые Записки ЕГУ, 1987, №1, с. 39–45.

Լ.Ա. ՄԱԶՄԱՆՅԱՆ

ՀՈՒԼԻ ՊՏՏԱԿԱՆ ՀԱՐԺՄԱՆ ԸՍՏ ԱԶԴՈՂ ՈՒԺԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է ծանր հողի՝ իր դինամիկական սինետրիայի առանցքի շուրջը պտտական շարժման կայունության խնդիրը ըստ ազդող ուժի:

Ցույց է տրվում, որ ցանկացած անկյունային արագությամբ պտտվող և պարամետրերի ցանկացած արժեքներ ունեցող հողի շարժումը անկայուն է ըստ ազդող ուժի:

L.A. MAZMANIAN

ABOUT THE STABILITY OF THE ROTARY MOTION OF THE GYROSCOPE BY THE INFLUENTIAL FORCE

Summary

The research is on the problem of the rotary motion stability of the heavy gyroscope around its axis of dynamic symmetry by the influential force.

It is shown that with any angular speed and with any values of parameters, the rotary motion of the gyroscope is unstable by the influential force.