

УДК 539.3

И.М. КАРАХАНЫ

О ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ПРИ ДИФРАКЦИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье обосновывается граничное условие типа скачка, которое рассматривалось в граничной задаче, рассмотренной в [1], связанной с дифракцией гармонической волны на упругом полубесконечном включении.

В работе [1] с использованием метода факторизации матриц-функций (см. [2–4]) было разрешено матричное уравнение Винера – Хопфа, возникшее в граничной задаче дифракции гармонической волны на упругое полубесконечное включение. В данной статье обосновывается граничное условие типа скачка, рассмотренное в [1].

Пусть упругая антиплоская гармоническая волна из бесконечности падает на тонкое упругое включение с толщиной δ (см. [5,6]).

Верхнее и нижнее полупространства (с номерами $\langle 1 \rangle$ и $\langle 3 \rangle$) будем по-прежнему считать изотропными полупространствами с разными упругими свойствами, а среда $\langle 2 \rangle$ – упругое бесконечное включение со своими свойствами. Если предположить, что среда находится в антиплоском состоянии, то в каждой среде вектор упругого перемещения

$$\bar{V}^{\langle j \rangle}(x, y, t) = \{0; 0; V^{\langle j \rangle}(x, y, t)\}. \quad (1)$$

Тогда (см. [7,8]) уравнение упругого колебания в каждой среде $\langle j \rangle$, где $j=1,2,3$, есть

$$\frac{\partial^2 V^{\langle j \rangle}}{\partial t^2} = c_j^2 \Delta V^{\langle j \rangle}. \quad (2)$$

Здесь $c_j^2 = \frac{G_j}{\rho_j}$, а ρ_j и G_j – соответственно плотность и модуль сдвига

для $\langle j \rangle$ -ой среды.

Определим через

$$\beta_j^2 = \left(\frac{c}{c_j}\right)^2 - 1, \quad k_2 = k_1 \operatorname{tg} \theta_0, \quad \text{где } c = \frac{\omega}{k_1}.$$

В этом случае решения уравнения (2) в средах $\langle 1 \rangle$ – $\langle 3 \rangle$ с учетом отра-

жения в среде <1> и преломления в среде <2> соответственно запишутся в виде

$$\begin{cases} V^{<1>}(x, y, t) = v_0 e^{-i(\omega t + k_1 x)} [e^{-ik_1 y \operatorname{tg} \theta_0} + A e^{i\beta_1 k_1 y}], \\ V^{<2>}(x, y, t) = v_0 e^{-i(\omega t + k_1 x)} [B \sin \beta_2 k_1 y + C \cos \beta_2 k_1 y], \\ V^{<3>}(x, y, t) = v_0 e^{-i(\omega t + k_1 x)} D e^{-ik_1 \beta_3 y}. \end{cases} \quad (3)$$

Используя условия согласования на границах включения из соотношения (3), получаем:

на границе включения $y=0$

$$\begin{cases} V^{<1>}(x, 0, t) = V^{<2>}(x, 0, t), \\ G_1 \frac{\partial V^{<1>}(x, 0, t)}{\partial y} = G_2 \frac{\partial V^{<2>}(x, 0, t)}{\partial y}, \end{cases} \quad (4)$$

а на границе включения $y=-\delta$

$$\begin{cases} V^{<2>}(x, -\delta, t) = V^{<3>}(x, -\delta, t), \\ G_2 \frac{\partial V^{<2>}(x, -\delta, t)}{\partial y} = G_3 \frac{\partial V^{<3>}(x, -\delta, t)}{\partial y}. \end{cases} \quad (5)$$

Полагая

$$\beta = \beta_2 k_1 \delta, \quad \bar{D} = D e^{i\beta_3 k_1 \delta}, \quad a_1 = i \frac{\beta_1 G_1}{\beta_2 G_2}, \quad a_3 = i \frac{\beta_3 G_3}{\beta_2 G_2},$$

из (4), (5) имеем

$$\begin{cases} 1 + A = C, \\ a_1 \left(A - \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\beta_1} \right) = B, \\ -B \sin \beta + C \cos \beta = \bar{D}, \\ B \cos \beta + C \sin \beta = -a_3 \bar{D}. \end{cases} \quad (6)$$

Из соотношения (6) получаем, что

$$\begin{cases} \bar{D} = \frac{a_1 \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\beta_1} \right)}{(a_1 + a_3) \cos \beta + (1 - a_1 a_3) \sin \beta}, \\ 1 + A = a_1 \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\beta_1} \right) \frac{1 - a_3 \sin \beta}{(a_1 + a_3) \cos \beta + (1 - a_1 a_3) \sin \beta}, \\ A - \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\beta_1} = - \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\beta_1} \right) \frac{a_3 + \sin \beta}{(a_1 + a_3) \cos \beta + (1 - a_1 a_3) \sin \beta}. \end{cases} \quad (7)$$

Исходя из (7), имеем

$$\begin{cases} v = \frac{V^{<1>}(x, 0, t)}{V^{<3>}(x, -\delta, t)} = \frac{1+A}{D}, \\ \mu = \frac{G_1 \frac{\partial V^{<1>}(x, 0, t)}{\partial y}}{G_3 \frac{\partial V^{<3>}(x, -\delta, t)}{\partial y}} = -\frac{a_1}{a_3} \frac{A - \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\beta_1}}{D}. \end{cases} \quad (8)$$

Если $k_1 \delta \ll 1$ и полупространства $<1>$ и $<3>$ совпадают как упругие среды, то, учитывая соотношения (7) из (8), имеем

$$\begin{cases} v \cong 1 - i \frac{G_1 \beta_1 k_1 \delta}{G_2}, \\ \mu \cong 1 - i \frac{G_2 \beta_2^2 k_1 \delta}{\beta_1 G_1}. \end{cases} \quad (9)$$

В итоге, так как

$$V^{<1>}(x, y, t) = V^{<3>}(x, y, t) = V(x, y, t),$$

искомые граничные условия на упругом бесконечном включении запишутся в виде

$$\begin{cases} V(x, +0, t) = v V(x, -0, t), \\ \frac{\partial V(x, +0, t)}{\partial y} = \mu \frac{\partial V(x, -0, t)}{\partial y}. \end{cases} \quad (10)$$

Кафедра механики сплошной среды

Поступило 13.04.2001

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В.С., Караханян И.М. – Ученые записки ЕГУ, 2001, N 2, с. 32–39.
2. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: И–Л, 1962.
3. Бабешко Б.А. Обобщенный метод факторизации в пространственно динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
4. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1983.
5. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова Думка, 1981.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Физика сплошной среды. М.: Мир, 1966.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
8. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988.

Ի.Մ. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ՆԵՐԴԻՐԻ ՎՐԱ ՀԱՐՄՈՆԻԿ ԱԼԻՔԻ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏ
ԿԱՊԱԾ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Տվյալ հոդվածում հիմնավորվում է թռիչքի տիպի եզրային այն պայմանը, որը դիտարկվում է [1]-ում քննարկվող սահմանային խնդրում՝ կապված առաձգական կիսաանվերջ ներդիրի վրա հարմոնիկ ալիքի դիֆրակցիայի հետ:



I.M. KARAKHANIAN

ON BOUNDARY CONDITION BY DIFFRACTION OF HARMONIC
WAVE ON THE INFINITE INCLUSION

Summary

In the given article the jump type boundary condition is proved, which was considered in a boundary problem discussed in [1], connected with a harmonic wave diffraction on the half-infinite inclusion.