

Математика

УДК 513.8

И.М. КАРАХАНЫАН

ОБ УРАВНЕНИИ $hx-xk=c$ В БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ A
С ЭРМИТОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ h, k

В данной работе изучается вопрос разрешимости уравнения $hx-xk=c$, где h, k – эрмитовы элементы слабо полной банаховой алгебры A . Доказывается (теорема 1) критерий разрешимости уравнения $hx-xk=c$, который позволяет (теорема 2) получить следующий алгебраический критерий разрешимости этого уравнения. Для разрешимости в A уравнения $hx-xk=c$ необходимо и достаточно подобие матриц $\begin{pmatrix} h, 0 \\ 0, k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} h, c \\ 0, k \end{pmatrix}$.

Пусть A – комплексная, слабо полная (в частности рефлексивная или гильбертова (см. [1,2]) банахова алгебра с единицей 1 и пусть $\|1\| = 1$, $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ для всех элементов $a, b \in A$. Напомним, что линейный функционал $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ называется *состоянием*, если $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$. Пусть $P(A)$ обозначает множество всех состояний, которое есть слабо-звездочно выпуклый компакт в A^* . Множество $V(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in P(A)\}$ называется (алгебраическим) *числовым образом* элемента $a \in A$. Заметим, что если A – подалгебра в алгебре $BL(H)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H , и оператор $T \in A$, то $V(T)$ совпадает с замыканием *обычного числового образа* оператора T (см. [3]). Напомним, что элемент $h \in A$ называется *эрмитовым*, если $V(h) \subset \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел. Это условие равносильно тому, что $\|\exp(i th)\| = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

В работах [4–6] для операторной алгебры $A = BL(X)$, где X – комплексное банахово (в частности гильбертово) пространство, изучалась разрешимость однородного уравнения $ax-xb=c$, где операторы $a, b, c \in BL(X)$.

В настоящей работе исследуется разрешимость уравнения $hx-xk=c$, где $h, k \in A$ есть эрмитовы элементы.

Пусть A – комплексная, слабо полная банахова алгебра с единицей. Обозначим через $H(A)$ множество всех эрмитовых элементов алгебры A , которая является замкнутым $\mathbb{R}$ -линейным подпространством в A . Если $a \in A$, то нетрудно видеть, что $V(a) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \Delta(\lambda, \|\lambda 1 - a\|)$, где $\Delta(\lambda, \|\lambda 1 - a\|) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda| \leq \|\lambda 1 - a\|\}$, откуда следует, что $Sp(a) \subset V(a)$, где $Sp(a) =$

спектр элемента a .

Предложение 1. Пусть элемент $h \in H(A)$ и $\varphi \in P(A)$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-r}^r \langle (h - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle ds = \text{sgnt}, \text{ где } \lambda = s + it \in \mathbb{C}, \langle \cdot, \varphi \rangle = \varphi(\cdot). \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $K_h(\lambda) = \langle \frac{1}{\lambda} + (h - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle$. Тогда $K_h(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \langle h(1 - \frac{h}{\lambda})^{-1}, \varphi \rangle$, откуда следует, что

$$|\lambda K_h(\lambda)| \leq \frac{1}{|\lambda|} |\langle h(1 - \frac{h}{\lambda})^{-1}, \varphi \rangle| \leq \frac{M}{|\text{Im } \lambda|}.$$

Используя интегральную формулу Коши, получаем, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r K_h(\lambda) ds = 0$,

откуда следует $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-r}^r \langle (h - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle ds = -\frac{\varphi(I)}{\pi i} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{ds}{\lambda} = \text{sgnt}$, так как $\varphi \in P(A)$. Предложение 1 доказано.

Для $t > 0$, $r > 0$ рассмотрим элемент $x_{t,r} = x(h, k, c; t, r) \in A$, определяемый по формуле

$$x_{t,r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r (h - \bar{\lambda} I)^{-1} c(k - \lambda I)^{-1} ds.$$

Тогда

$$\|x_{t,r}\| \leq \frac{2\|c\|}{\pi} \sqrt{\arctg \frac{r + \|h\|}{t} \cdot \arctg \frac{r + \|k\|}{t}} \leq \frac{\|c\|}{t}, \text{ т. е. } \|x_{t,r}\| \leq \|c\| \text{ при всех } r > 0.$$

В силу слабой полноты банаховой алгебры A рассмотрим элемент $x_t = x(h, k, c; t) \in A$ как слабый интеграл $x_t = w\text{-}\lim_{r \rightarrow \infty} x_{t,r}$, который будем писать в виде

$$x_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (h - \bar{\lambda} I)^{-1} c(k - \lambda I)^{-1} ds. \quad (2)$$

Предложение 2. Пусть $t > 0$. Тогда для элемента $x_t \in A$ выполняется неравенство $t \|x_t\| \leq \|c\|$.

Доказательство. Так как $\|x_t\| = \sup\{|\langle x_t, \varphi \rangle| : \varphi \in P(A)\}$, то

$$\begin{aligned} |\langle x_t, \varphi \rangle| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle (h - \bar{\lambda} I)^{-1} c(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle| ds \leq \frac{\|c\|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|(h - \bar{\lambda} I)^{-1}\| \|(k - \lambda I)^{-1}\| ds \leq \\ &\leq \frac{\gamma \|c\|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|(h - \lambda I)^{-1}\| \|(k - \lambda I)^{-1}\| ds, \end{aligned}$$

где $\gamma = 1.92 \pm 0.04$ (см. [7]).

Ввиду того что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|(h - \lambda I)^{-1}\|^2 ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{|s|^2} = \frac{\pi}{t}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \|(k - \lambda I)^{-1}\|^2 ds \leq \frac{\pi}{t},$$

при $t > 0$ получаем, что $|\langle x_t, \varphi \rangle| \leq \frac{\|c\|}{t}$, откуда $t \|x_t\| \leq \|c\|$. Предложение 2

доказано.

Предложение 3. Элемент $x_t \in A$ есть единственное решение уравнения

$$(h + itI)x - x(k - itI) = c, \quad (3)$$

где $t > 0$.

Доказательство. Пусть элемент $x_0 \in A$ — решение уравнения (3) и пусть $\lambda = s + it \in \mathbb{C}$. Тогда

$$(h + itI - sI)x_0 - x_0(k - itI - sI) = c, \text{ т.е. } (h - \bar{\lambda}I)x_0 - x_0(k - \lambda I) = c.$$

Отсюда имеем, что

$$x_0(k - \lambda I)^{-1} - (h - \bar{\lambda}I)^{-1}x_0 = (h - \bar{\lambda}I)^{-1}c(k - \lambda I)^{-1}.$$

Тогда для $\varphi \in P(A)$ получаем, что

$$\langle x_0(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle - \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}x_0, \varphi \rangle = \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}c(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle,$$

откуда
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle x_0(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle - \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}x_0, \varphi \rangle ds =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}c(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle ds.$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle x_0(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle ds = \frac{1}{2} \langle x_0, \varphi \rangle \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}x_0, \varphi \rangle ds = -\frac{1}{2} \langle x_0, \varphi \rangle,$$

то в итоге получаем, что $\langle x_0, \varphi \rangle = \langle x_t, \varphi \rangle$. Откуда следует, что $x_t = x_0$, так как $P(A)$ разделяет точки алгебры A . Таким образом, если решение существует, то оно единственно.

Теперь покажем, что элемент $x_t \in A$ — решение уравнения (3). Так как

$$(h + itI)x_t - x_t(k - itI) = (h - \bar{\lambda}I)x_t - x_t(k - \lambda I),$$

то для $\varphi \in$ имеем

$$\begin{aligned} \langle (h + itI)x_t, \varphi \rangle - \langle x_t(k - itI), \varphi \rangle &= \langle (h - \bar{\lambda}I)x_t, \varphi \rangle - \langle x_t(k - \lambda I), \varphi \rangle = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle c(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle - \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}c, \varphi \rangle ds = \langle c, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом элемент x_t — решение уравнения (3).

Предложение 3 доказано.

Замечание. Так как $V(h + itI) = V(h) + it$, $V(k - itI) = V(k) - it$ и $V(h), V(k) \subset \mathbb{R}$, то $V(h + itI) \cap V(k - itI) = \emptyset$ и поэтому $Sp(h + itI) \cap Sp(k - itI) = \emptyset$.

Поэтому уравнение (3) имеет единственное решение, которое можно записать также по многомерной формуле

$$x_t = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma(h + itI)} \int_{\gamma(k - itI)} \frac{((h + itI) - \lambda I)^{-1} c ((k - itI) - \mu I)^{-1}}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu.$$

Теорема 1. Для того чтобы уравнение $hx - xk = c$, где $h, k \in H(A)$, $c \in A$, было разрешимо в алгебре A , необходимо и достаточно, чтобы

числовое множество $\{\|x_t\|: t > 0\}$ было ограничено. При этом условии существует слабо сходящаяся последовательность элементов $\{x_{t_n}\}$ при $t_n \rightarrow 0$, и всякая такая слабо сходящаяся последовательность стремится к решению данного уравнения.

Доказательство. Пусть $x_0 \in A$ – решение уравнения $hx - xk = c$. Тогда $(h - \bar{\lambda}I)x_0 - x_0(k - \lambda I) = c + 2itx_0$, где $\lambda = s + it \in \mathbb{C}$.

Отсюда имеем, что

$$x_0(k - \lambda I)^{-1} - (h - \bar{\lambda}I)^{-1}x_0 = (h - \bar{\lambda}I)^{-1}c(k - \lambda I)^{-1} + 2it(h - \bar{\lambda}I)^{-1}x_0(k - \lambda I)^{-1}.$$

Если $\varphi \in P(A)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \{x_0(k - \lambda I)^{-1}, \varphi\} \cdot \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}x_0, \varphi \rangle ds = \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}c(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle ds + \\ + 2it \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle (h - \bar{\lambda}I)^{-1}x_0(k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle ds. \end{aligned}$$

В итоге получаем, что

$$\langle x_0, \varphi \rangle = \langle x(h, k, c; t), \varphi \rangle + 2it \langle x(h, k, x_0; t), \varphi \rangle = \langle x_t, \varphi \rangle + 2it \langle x(h, k, x_0; t), \varphi \rangle.$$

В силу предложения 2 имеем, что

$$t\|x(h, k, x_0; t)\| \leq \|x_0\|.$$

Следовательно, $\|x_t\| \leq 3\|x_0\|$, т.е. числовое множество $\{\|x_t\|: t > 0\}$ ограничено.

Обратно, если множество $\{\|x_t\|: t > 0\}$ ограничено, то существует последовательность элементов $\{x_{t_n}\} \subset A$, которая при $t_n \rightarrow 0$ слабо сходится к некоторому элементу $x_0 \in A$. Так как при каждом n элемент $x_{t_n} \in A$ есть решение уравнения

$$(h + it_n I)x - x(k - it_n I) = c,$$

то в итоге имеем, что x_0 – решение уравнения $hx - xk = c$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть элементы $h, k \in A$, $c \in A$. Тогда для разрешимости уравнения $hx - xk = c$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{pmatrix} h & c \\ 0 & k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ были подобны.

Доказательство. Если уравнение разрешимо, т.е. существует элемент $x_0 \in A$, что $hx_0 - x_0k = c$, то

$$\begin{pmatrix} I & -x_0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & x_0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & hx_0 - x_0k \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & c \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Наоборот, пусть

$$\begin{pmatrix} h, & c \\ 0, & k \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} h, & 0 \\ 0, & k \end{pmatrix} Q$$

Так как

$$\begin{pmatrix} k, & 0 \\ -c, & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & I \\ -I, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h, & c \\ 0, & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -I \\ I, & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} h, & 0 \\ -c, & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & I \\ I, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k, & c \\ 0, & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & I \\ I, & 0 \end{pmatrix},$$

то в итоге

$$\begin{pmatrix} k, & 0 \\ -c, & h \end{pmatrix} = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} k, & 0 \\ 0, & h \end{pmatrix} Q_1,$$

где

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0, & I \\ I, & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 0, & -I \\ I, & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & I \\ -I, & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} 0, & I \\ I, & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$\begin{pmatrix} k - \lambda I, & 0 \\ -c, & h - \lambda I \end{pmatrix} = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} k - \lambda I, & 0 \\ 0, & h - \lambda I \end{pmatrix} Q_1,$$

где $\lambda = s + it \in \mathbb{C}$, $t \rightarrow 0$, откуда

$$\begin{pmatrix} (h - \lambda I)^{-1}, & 0 \\ -(h - \lambda I)^{-1} c (k - \lambda I)^{-1}, & (k - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} (h - \lambda I)^{-1}, & 0 \\ 0, & (k - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} Q_1.$$

Умножим слева обе части полученного соотношения на матрицу

$$\begin{pmatrix} I, & 0 \\ 0, & I - 2it(h - \bar{\lambda} I)^{-1} \end{pmatrix}. \text{ Тогда получим}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (h - \lambda I)^{-1}, & 0 \\ -(h - \bar{\lambda} I)^{-1} c (k - \lambda I)^{-1}, & (k - \lambda I)^{-1} + (\bar{\lambda} - \lambda)(h - \bar{\lambda} I)^{-1} (k - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} = \\ & = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} (h - \lambda I)^{-1}, & 0 \\ 0, & (k - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} Q_1 - \begin{pmatrix} I, & 0 \\ 0, & -2it(h - \bar{\lambda} I)^{-1} \end{pmatrix} Q_1^{-1} \begin{pmatrix} (h - \lambda I)^{-1}, & 0 \\ 0, & (k - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} Q_1. \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям данного тождества процедуру слабого интегрирования

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle \cdot, \varphi \rangle ds,$$

получим

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \langle I, \varphi \rangle \right), & 0 \\ -\langle x, \varphi \rangle, & \left(\frac{1}{2} I + Z, \varphi \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t \begin{pmatrix} I, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} - 2it \begin{pmatrix} \langle I, \varphi \rangle, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2} \langle I, \varphi \rangle \end{pmatrix} Q_1^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \langle I, \varphi \rangle, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2} \langle I, \varphi \rangle \end{pmatrix} Q_1,$$

где $\varphi \in P(A)$, $Z_t = -2it \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle (h - \bar{\lambda} I)^{-1} (k - \lambda I)^{-1}, \varphi \rangle ds$.

Так как при $t > 0$ $\|Z_t\| < \gamma$ и правая часть полученного соотношения ограничена, то множество $\{\|x_t\|_{r>0}\}$ ограничено. Остается сослаться на теорему 1. Теорема доказана.

1. Наймарк М.А. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
2. Bonsal J.F. and Duncan J. Complete normed algebras. Springer-Verlag, 1973.
3. Халмош П. Гильбертовы пространства в задачах. М.: Мир, 1970.
4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
5. Rosenblum M. — Proc Amer. Math. Soc. 1969, v.20, p. 115–120.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1970.
7. Gorin E.A. — Russian Journal of Mathematical Physics, 1997, v.8, N1, p.117–118.

Ի.Մ. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

ԲԱՆԱԽԻ A ՀԱՆՐԱՀԱՇՎՈՒՄ h, k ԷՐՄԻՏՅԱՆ
ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ $hx-xk=c$ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Տվյալ աշխատանքում ուսումնասիրվում է $hx-xk=c$ հավասարման լուծելիության հարցը, որտեղ h, k -ն թույլ լրիվ A Բանախի հանրահաշվի էրմիտյան տարրերն են: Հոդվածում (թեորեմ 1) ապացուցվում է հավասարման լուծելիության հայտանիշ, որը թույլ է տալիս (թեորեմ 2) ստանալ այդ հավասարման համար հետևյալ հանրահաշվական հայտանիշը: Որպեսզի $hx-xk=c$ հավասարումը ունենա լուծում A -ում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\begin{pmatrix} h, & 0 \\ 0, & k \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} h, & c \\ 0, & k \end{pmatrix}$ մատրիցները լինեն մման :

I.M. KARAKHANIAN

ON THE EQUATION $hx-xk=c$ IN BANACH ALGEBRA A ,
WITH HERMITIAN COEFFICIENTS h, k

Summary

This work investigates the problem of solvability on the equation $hx-xk=c$, with Hermitian coefficients h, k of weak complete Banach algebra A . In the article (theorem 1) the criterion of solvability of equation $hx-xk=c$ is proved which implies (theorem 2) the following algebraic criterion of solvability. For solvability in A the equation $hx-xk=c$ the similarity of matrixes $\begin{pmatrix} h, & 0 \\ 0, & k \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} h, & c \\ 0, & k \end{pmatrix}$ is necessary and sufficient.