

Математика

УДК 517.948.25

Г.Г. СААКЯН

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРАКА

Равенство Парсеваля доказывается для элементов энергетического пространства $L^2_{\Delta_0}(I)$, порожденного двухпараметрической краевой задачей Дирака.

§1. Постановка задачи, предварительные результаты. Вопросы полноты собственных функций многопараметрических спектральных задач, впервые затронутые Гильбертом в начале века, активно начали изучаться в последние 30 лет (см., напр., [1–8]). В работе рассматривается следующая двухпараметрическая задача Дирака:

$$S \frac{dy^r(x_r)}{dx_r} + G_r(x_r) y^r(x_r) = \sum_{s=1}^2 \lambda_s A_{rs}(x_r) y^s(x_r), \quad 0 \leq x_r \leq \ell_r, \quad r=1,2, \quad (1.1)$$

с краевым условием

$$y^r(\ell_r) = \rho_r y^r(0), \quad \text{где } |\rho_r| = 1. \quad (1.2)$$

Здесь $G_r(x_r), A_{rs}(x_r)$ ($s, r=1,2$) – непрерывные на $[0, \ell_r]$ вещественные, симметричные матрицы порядка 2×2 , λ_1, λ_2 – комплексные параметры, $y^r(x_r) = (y^r_1(x_r), y^r_2(x_r))$ – C^2 -значные неизвестные вектор-функции. S – сигнатурная матрица: $S^* = -S$, $S^2 = -E$ (E – единичная матрица порядка 2×2).

Пусть $H_r = L^2[0, \ell_r]$, $r=1,2$, – гильбертово пространство C^2 -значных вектор-функций $f^r(x_r) = (f^r_1(x_r), f^r_2(x_r))$, $0 \leq x_r \leq \ell_r$, таких, что

$$\langle f^r | f^r \rangle = \int_0^{\ell_r} \langle f^r(x_r), f^r(x_r) \rangle dx < \infty, \quad r=1,2, \quad (1.3)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения в C^2 , а $\langle \cdot | \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения в H_r , $r=1,2$. Обозначим через H пространство $H_1 \otimes H_2$. Элементами H будут всевозможные тензорные произведения произвольных двух вектор-функций $f^1(x_1) = (f^1_1(x_1), f^1_2(x_1)) \in H_1$ и $f^2(x_2) = (f^2_1(x_2), f^2_2(x_2)) \in H_2$, определяемые в H как четырехмерные вектор-функции:

$$f(x) = f^1(x_1) \otimes f^2(x_2) = (f_1^1(x_1), f_1^2(x_2), f_1^1(x_1) \times \\ \times f_2^2(x_2), f_2^1(x_1), f_2^2(x_2), f_2^1(x_1) f_2^2(x_2)). \quad (1.4)$$

Определим в H скалярное произведение $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$ по формуле

$$\langle\langle f | g \rangle\rangle = \int_I \langle\langle f(x), g(x) \rangle\rangle dx, \quad I = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2] \subset R^2, \quad (1.5)$$

где $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ – знак скалярного произведения в $C^2 \otimes C^2$. Предполагается, что H пополнено в его собственном скалярном произведении. Нетрудно показать, что H будет гильбертовым пространством.

Тензорное произведение двух двумерных матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ определяется как следующая четырехмерная матрица:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.1. Если при $\lambda = \lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in C^2$ система (1.1) имеет решение $\{y^1(x_1, \lambda), y^2(x_2, \lambda)\} \neq \{0, 0\}$, удовлетворяющее условиям (1.2), то $\lambda = \lambda^0$ называется собственным значением, а тензор $y^1(x_1, \lambda) \otimes y^2(x_2, \lambda)$ – собственной функцией задачи (1.1), (1.2), соответствующей собственному значению λ_0 . Множество собственных значений называется точечным спектром этой задачи и обозначается σ_p .

Пусть $A(x)$ ($x \in I$) – непрерывная вещественная симметричная матрица-функция, которая при каждом $x \in I$ является ограниченным оператором в $C^2 \otimes C^2$. $A(x)$ называется положительным оператором, если

$$\int_I \langle\langle A(x)f(x), f(x) \rangle\rangle dx > 0 \quad (1.6)$$

при любом $f(x) \neq 0$ на I , $f(x) = f^1(x_1) \otimes f^2(x_2) \in L^2(I)$.

Пусть $A(x)$ – положительный оператор. Определим для f и g из $L^2(I)$ скалярное произведение в виде $[f, g] = \langle\langle Af, g \rangle\rangle$. Полученное при этом (энергетическое) пространство также будет гильбертовым (см. [9]). Обозначим его через $L_A^2(I)$.

Нетрудно проверить, что имеет место

Лемма 1.1. Если C^2 -значная функция $y'(x_r)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2), то справедливо равенство

$$\langle Sy'(l_r), y'(l_r) \rangle = \langle Sy'(0), y'(0) \rangle. \quad (1.7)$$

Введем обозначения

$$\Delta_0 = \Delta(x) = A_{11}(x_1) \otimes A_{22}(x_2) - A_{12}(x_1) \otimes A_{21}(x_2). \quad (1.8)$$

Имеет место следующая

Теорема 1.1. Если Δ_0 – оператор положительного типа в $L^2(I)$, то

а) собственные значения задачи (1.1), (1.2) вещественны,
 б) собственные функции $y(x, \lambda), z(x, \lambda)$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, Δ_0 -ортогональны, т.е.

$$\int_1 \langle \Delta_0 y | z \rangle = \int_1 \langle \Delta_0 y(x, \lambda), z(x, \mu) \rangle dx = 0. \quad (1.9)$$

Доказательство. Умножая уравнение (1.1) скалярно на y' справа, затем слева, получим уравнения

$$\left\langle S \frac{d}{dx_r} y', y' \right\rangle + \langle G_r y', y' \rangle = \sum_{s=1}^2 \lambda_s \langle A_{rs} y', y' \rangle, \quad r, s = 1, 2, \quad (1.10)$$

$$\langle y', S \frac{d}{dx_r} y' \rangle + \langle y', G_r y' \rangle = \sum_{s=1}^2 \bar{\lambda}_s \langle y', A_{rs} y' \rangle, \quad r, s = 1, 2. \quad (1.11)$$

Вычитывая из равенства (1.10) равенство (1.11) и учитывая соотношения $G_r^* = G_r$, $A_{rs}^* = A_{rs}$, $S^* = -S$, $r, s = 1, 2$, найдем

$$\frac{d}{dx} \langle S y', y' \rangle = \sum_{s=1}^2 (\lambda_s - \bar{\lambda}_s) \langle A_{rs} y', y' \rangle \quad (1.12)$$

или

$$\langle S y'(l_r), y'(l_r) \rangle - \langle S y'(0), y'(0) \rangle = \sum_{s=1}^2 (\lambda_s - \bar{\lambda}_s) \alpha_{rs}, \quad (1.13)$$

где
$$\alpha_{rs} = \int_0^l \langle A_{rs} y', y' \rangle dx_r, \quad r, s = 1, 2. \quad (1.14)$$

В силу соотношения (1.7) левая часть соотношения (1.13) равна нулю. Отсюда следует, что

$$\sum_{s=1}^2 (\lambda_s - \bar{\lambda}_s) \alpha_{rs} = 0, \quad r = 1, 2. \quad (1.15)$$

Поскольку $\det(\alpha_{rs}) = \int_1 \langle \Delta_0 y(x), y(x) \rangle dx > 0$, то из (1.15) вытекает, что $\lambda_s - \bar{\lambda}_s = 0$, $s = 1, 2$. Следовательно, собственные значения вещественны.

Пусть теперь $y(x, \lambda)$ и $z(x, \mu)$ – собственные функции задачи (1.1), (1.2), соответствующие собственным значениям λ и μ ($\lambda \neq \mu$):

$$y(x, \lambda) = y^1(x_1, \lambda) \otimes y^2(x_2, \lambda), \quad z(x, \mu) = z^1(x_1, \mu) \otimes z^2(x_2, \mu). \quad (1.16)$$

Тогда, аналогично вышеизложенному, можно получить

$$\sum_{s=1}^2 (\lambda_s - \mu_s) \int_0^l \langle A_{rs} y^r(x_r, \lambda), z^r(x_r, \mu) \rangle dx_r = 0, \quad r = 1, 2. \quad (1.17)$$

Полученная алгебраическая система является однородной относительно $\lambda_s - \mu_s$ ($s = 1, 2$). Определитель этой системы имеет вид

$$\int_1 \langle \Delta_0 y(x, \lambda), z(x, \mu) \rangle dx,$$

который в силу $\lambda \neq \mu$ должен быть нулем. Теорема доказана.

§2. Теорема полноты. Рассмотрим следующую двухпараметрическую задачу на собственные значения:

$$T_r f_r = \sum_{s=1}^2 \lambda_s V_{rs} f_r, \quad r = 1, 2, \quad (2.1)$$

где V_{rs} , $s = 1, 2$, – ограниченные самосопряженные операторы в сепарабель-

ном гильбертовом пространстве H_r и T_r – самосопряженные неограниченные операторы в H_r с областью определения $D(T_r)$, $r=1,2$.

Обозначим через V_{rs}^+ и T_r^+ операторы, действующие в $H = H_1 \otimes H_2$ по формулам $V_{1s}^+ = V_{1s} \otimes E$, $V_{2s}^+ = E \otimes V_{2s}$, $s=1,2$, $T_1^+ = T_1 \otimes E$, $T_2^+ = E \otimes T_2$.

Предположим, что выполняется следующее условие определенности: $\det \{ \langle V_{rs} f^r | f^r \rangle \}_{r,s=1,2} > 0$ для всех $f^r \neq 0$ в H_r , $r=1,2$.

Известно, что при выполнении условия определенности и в предположении, что каждый оператор T_r имеет компактную резольвенту и $0 \notin \rho(T_r)$ (резольвентное множество оператора T_r), справедлива

Теорема 2.1. (см., напр., [2]). Спектральная задача (2.1) обладает следующими свойствами:

а) собственные значения изолированы в R^2 , конечнократны и в конечной части R^2 не имеют предельной точки;

б) если для каждой $f^r \in D(T_r) \subset H_r$, $r=1,2$, и $f = f^1 \otimes f^2$ система уравнений

$$\sum_{s=1}^2 V_{rs}^+ g_s = T_r^+ f \quad r=1,2, \quad (2.2)$$

разрешима в $H_1 \otimes H_2$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\det \{ \langle V_{rs} f^r | f^r \rangle \} = \sum_m |\det \{ \langle V_{rs} f^r | h_{mr} \rangle \}|^2, \quad s, r=1,2, \quad (2.3)$$

где $\{h_{mr}\}_{m=1}^\infty$ – система собственных ортонормированных векторов задачи (2.1) в смысле

$$\det \{ \langle V_{rs} h_{mr} | h_{nr} \rangle \} = \delta_{mn}, \quad s, r=1,2.$$

Пусть $\mathcal{J}_r$ – множество C^2 -значных функций, удовлетворяющих условиям

1. $y^r(\ell_r) = \rho_r y^r(0)$, $|\rho_r| \neq 1$,
2. $y^r(x_r) \in L^2[0, \ell_r]$,
3. $y^r(x_r)$ абсолютно непрерывна на $[0, \ell_r]$,
4. $D_r y^r \equiv S \frac{dy^r}{dx_r} + G_r(x_r) y^r \in L^2[0, \ell_r]$.

Таким образом определяется дифференциальный оператор Дирака D_r с областью определения $\mathcal{J}_r$, которая всюду плотна в пространстве $L^2[0, \ell_r]$.

Известно, (см., напр., [10]), что рассматриваемый оператор Дирака самосопряженный и имеет компактную резольвенту, причем, не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что $0 \notin \rho(T_r)$.

Таким образом, для доказательства теоремы полноты для задачи (1.1), (1.2) достаточно предположить положительную определенность оператора Δ_0 в пространстве $L^2(I)$ и проверить разрешимость системы (2.2). В нашем случае она имеет вид

$$\begin{cases} A_{11}^+ g_1(x) + A_{12}^+ g_2(x) = D_1^+ f(x) \\ A_{21}^+ g_1(x) + A_{22}^+ g_2(x) = D_2^+ f(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

где $f(x) = f^1(x_1) \otimes f^2(x_2)$ и $f^r(x_r) \in L^2[0, \ell_r]$, $r=1,2$; A_s^+ , D_r^+ ($r,s=1,2$) – операторы, определенные в H по формулам $A_{1s}^+ = A_{1s} \otimes E$, $A_{2s}^+ = E \otimes A_{2s}$, $s=1,2$, $D_1^+ = D_1 \otimes E$, $D_2^+ = E \otimes D_2$.

Предположим, что Δ_0 – обратимый положительный оператор. Тогда из системы уравнений (2.4) найдем

$$g_1(x) = \Delta_0^{-1} [D_1^+(x_1)A_{22}^+(x_2) - A_{12}^+(x_1)D_2^+(x_2)]f(x),$$

$$g_2(x) = \Delta_0^{-1} [A_{11}^+(x_1)D_2^+(x_2) - A_{21}^+(x_2)D_1^+(x_1)]f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in I.$$

Следовательно, $g_r(x) \in L_{\Delta_0}^2(I)$, $r=1,2$. Таким образом, доказана

Теорема 2.2. Если Δ_0 – оператор положительного типа в пространстве $L^2(I)$, то для любого тензора $\omega \in L_{\Delta_0}^2(I)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int_I \langle\langle \Delta_0 \omega, \omega \rangle\rangle dx = \sum_k \int_I \langle\langle \Delta_0 \omega, u_m \rangle\rangle dx \|^2, \quad (2.5)$$

где $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ – система собственных ортонормированных векторов задачи (1.1), (1.2) в смысле

$$\det \{ \langle \Delta_0 u_m | u_k \rangle \} = \delta_{mk}.$$

Арцахский госуниверситет

Поступила 03.05.2001

ЛИТЕРАТУРА

1. Atkinson F. V. – Multiparameter Eigenvalue Problems. New York and London: Academic Press, 1972, v.1.
2. Browne P. J. – J. Math. Anal. and Appl., 1972, v.38, p. 553–568.
3. Browne P. J. – J. Math. Anal. Appl., 1977, v.60, p. 259–273.
4. Browne P. J. – Lect. Notes Math., 1982, v. 964, p. 95–109.
5. Browne P.J., Sleeman B.D. – Proc. Edinburg Math. Soc., 1986, v. 3, p. 343–348.
6. Sleeman B. D. Some aspects of Multi-parameter spectral theory, Dep. Math. Univ. Scotland, 1970, p. 81–94.
7. Volkmer Hans – Proc. Edinburg Math. Soc., 1996, 39, v.1, p. 111–132.
8. Berezansky Yu.M., Konstantinov A.Yu. – Укр. мат. журн., 1992, т. 44, N7, с. 901–913.
9. Якубович В.А., Старжинский В.А. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
10. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

Գ. Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԴԻՐԱԿԻ ԵՐԿՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ
ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԼՐԻՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիրակի երկպարամետրական խնդրով ծնված $L^2_{\Delta_0}(I)$ էներգետիկ տա-
րածության տարրերի համար ապացուցվում է Պարսևալի հավասարումը:

G.H. SAHAKIAN

ON COMPLETNESS OF EIGENVECTORS FOR DIRAC
TWO PARAMETER BOUNDARY PROBLEM

Summary

The Parseval identity is proved for elements of energetic space $L^2_{\Delta_0}(I)$, born
by twoparametric Dirac system.