

УДК 517.51

Ж. А. БАБАЯН

ОБ ОДНОЙ БИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МЮНТЦЕВСКИХ ФУНКЦИЙ

Для квазиполиномов из мюнтцевских систем $\{x^{\gamma_k}\}, \{e^{-\gamma_k x}\}$, где числа $\{\gamma_k\}$ действительные, ортогональные системы в интегральном представлении впервые получены Бадаляном Г. В. [1, 2].

Ниже они приведены в представлении (2) для $\{e^{-\gamma_k x}\}$, которое остается без изменения и в наиболее общем случае кратных γ_k .

В этой связи актуальность построения биортогональной системы, основанной на двух последовательностях степеней, обусловлена тем, что с заданной последовательностью степеней $\{e^{-\gamma_k x}\}$ вводится еще другая последовательность $\{e^{-\lambda_k x}\}$, свобода выбора которой создает возможность во многом упростить применение создаваемого таким образом аппарата представления функций.

В работе [1] Г.В.Бадаляном получена ортогональная система из мюнтцевской системы квазиполиномов, соответствующая системе классических полиномов Лежандра на $[0, 1]$. Их аналоги по системе функций $\{e^{-\gamma_k x}\}$ и обобщения на случай, когда

$$\gamma = \{\gamma_k\}_0^\infty, \quad 0 \leq \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\gamma_k} = \infty, \quad (1)$$

представляются контурными интегралами вида

$$\hat{x}'_n(x) = \hat{x}'_n(x, \gamma) = \frac{\hat{x}_n}{2\pi i} \int_c e^{\zeta x} \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta - \gamma_v)}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta, \quad x \in (0, \infty), \quad (2)$$

где $n=1, 2, \dots$, и контур c охватывает окрестности точек $0, -\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n$, а $\hat{x}_n$ удобно взятое число, оно определится ниже.

Раскрывая контурный интеграл путем вычисления вычетов подынтегральной функции в (2), с учетом кратности повторения чисел γ_k , а именно тогда, когда

$$\gamma_0 = 0 < \gamma_1 = \gamma_2 = \dots \gamma_{\mu_1} = p_1 < \gamma_{\mu_1+1} = \dots \gamma_{\mu_1+\mu_2} = p_2 < \dots, \quad (1')$$

получаем, что функции (2) также можно представить в виде суммы

$$\hat{\chi}_n^{(l)}(x) = \hat{a}_n \sum_{k=1}^n e^{-\mu_k x} \sum_{\nu=0}^{\mu_k-1} a_{k\nu} x^\nu, \quad x \in (0, \infty), \quad (2')$$

где $n = \sum_{k=1}^m \mu_k$, μ_k – кратность повторения чисел γ_k в (1').

При этом подходящим выбором чисел $\hat{a}_n$ получается, что

$$\|\hat{\chi}_n^{(l)}(x)\|_{L^2(0, \infty)} = \left(\int_0^\infty |\hat{\chi}_n^{(l)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 1. \quad (3)$$

А вообще

$$\int_0^\infty \hat{\chi}_n^{(l)}(x) \hat{\chi}_{n'}^{(l)}(x) dx = \delta_{nn'} \begin{cases} 0, & n \neq n', \\ 1, & n = n'. \end{cases} \quad (4)$$

В данной работе наряду с последовательностью (1) вводится еще другая, вообще говоря, произвольная последовательность чисел

$$\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty, \quad 0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \lambda_n \leq \dots, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty, \quad (5)$$

и вместе с функциями (2) рассматриваются и функции видов

$$\hat{\chi}_k(x) = \frac{\hat{a}_k}{2\pi i} \int_c^{\zeta_k} e^{\zeta x} \frac{\prod_{\nu=0}^{k-1} (\zeta - \lambda_\nu)}{\prod_{\nu=0}^k (\zeta + \gamma_\nu)} d\zeta \quad (6)$$

$$\text{и} \quad \hat{\chi}_k^*(x) = \frac{\hat{a}_k^*}{2\pi i} \int_c^{\zeta_k} e^{\zeta x} \frac{\prod_{\nu=0}^{k-1} (\zeta - \gamma_\nu)}{\prod_{\nu=0}^k (\zeta + \lambda_\nu)} d\zeta, \quad x \in (0, \infty), \quad (7)$$

где $k=1, 2, \dots$, и последовательности чисел $\gamma = \{\gamma_\nu\}$ и $\lambda = \{\lambda_\nu\}$ определены соответственно в (1) и (5).

Доказывается, что системы (6) и (7) квазиполиномов из мюнтцевских систем $\{e^{-\gamma_k x}\}$ и $\{e^{-\lambda_k x}\}$ на $(0, \infty)$ составляют биортогональную систему. А при выборе $\hat{a}_k = \hat{a}_k^* = (\gamma_k + \lambda_k)^{1/2}$ указанная система становится нормальной.

Таким образом, в случае ортогональной системы (2) $\{\lambda_k\}$ не вводится, там имеем дело только с одной последовательностью $\{\gamma_k\}$, и актуальность результатов настоящей статьи заключается в том, что наряду с $\{\gamma_k\}$ вводим другую свободно выбранную последовательность $\{\lambda_k\}$, которая существенно проще $\{\gamma_k\}$, чем и предоставляется возможность упрощения рядов Фурье по полиномам из системы $\{e^{-\gamma_k x}\}$.

§1. Биортогональные системы функций типа $\hat{\chi}_n^{(l)}(x)$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.1. Системы функций (6) и (7) на $(0, \infty)$ составляют биортогональную систему при весовой функции $\rho(x) = 1$, а при выборе

$$\hat{a}_k = \hat{a}_k^* = (\gamma_k + \lambda_k)^{1/2} \quad (8)$$

полученная система становится нормальной.

На самом деле для функций $\hat{\chi}_k(x)$ и $\hat{\chi}_k^*(x)$, контуры интегралов могут быть заменены на $(\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$ и $(\sigma' - i\infty, \sigma' + i\infty)$, где

$$\sigma > -\gamma_0, \sigma' > -\lambda_0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \hat{\chi}_m(x) \hat{\chi}_n(x) dx &= \frac{(\gamma_m + \lambda_m)^{1/2} (\gamma_n + \lambda_n)^{1/2}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \prod_{v=0}^n \frac{(\zeta - \lambda_v) d\zeta}{(\zeta + \gamma_v)(\zeta - \lambda_m)} \frac{1}{2\pi i} \\ &\cdot \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \prod_{v=0}^n \frac{(\zeta' - \gamma_v)}{(\zeta' + \lambda_v)} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - \gamma_n)} \int_0^{\infty} e^{(\zeta + \zeta')x} dx. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом можно взять $-\gamma_0 < \sigma < 0$, $-\lambda_0 < \sigma' < 0$, и поэтому

$$\int_0^{\infty} e^{(\zeta + \zeta')x} dx = -\frac{1}{\zeta + \zeta'}, \text{ т.к. } \operatorname{Re}(\zeta + \zeta') < 0.$$

Примем $\operatorname{Re}(\zeta + \zeta') = \operatorname{Re}(\zeta' - (-\zeta)) = \sigma' - (-\sigma)$, где $\sigma < -\sigma'$, тогда из (9) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \hat{\chi}_m(x) \hat{\chi}_n^*(x) dx &= \frac{\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n^*}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \prod_{v=0}^n \frac{(\zeta - \lambda_v)}{(\zeta + \gamma_v)} \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda_m} \frac{1}{2\pi i} \\ &\cdot \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \prod_{v=0}^n \frac{(\zeta' - \gamma_v)}{(\zeta' + \lambda_v)} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \gamma_n} \frac{-1}{\zeta + \zeta'}, \end{aligned} \quad (9')$$

где $\sigma' = \operatorname{Re} \zeta' < -\operatorname{Re} \zeta = -\sigma$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \prod_{v=0}^n \frac{(\zeta' - \gamma_v)}{(\zeta' + \lambda_v)} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \gamma_n} \frac{-1}{\zeta' - (-\zeta)} &= \operatorname{Res} \prod_{v=0}^n \frac{(\zeta' - \gamma_v)}{(\zeta' + \lambda_v)} \frac{1}{\zeta' - \gamma_n} \frac{-1}{\zeta' - (-\zeta)} = \\ &= \prod_{v=0}^n \frac{-\zeta - \gamma_v}{-\zeta + \lambda_v} \frac{1}{-\zeta - \gamma_n}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (9') и полагая $m \neq n$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \hat{\chi}_m(x) \hat{\chi}_n^*(x) dx &= \frac{\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n^*}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \prod_{v=0}^n \frac{(\zeta - \lambda_v)}{(\zeta + \gamma_v)} \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda_m} \prod_{v=1}^n \frac{-\zeta - \gamma_v}{-\zeta + \lambda_v} \frac{1}{-\zeta - \gamma_n} = \\ &= \frac{-\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n^*}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \prod_{v=0}^n \frac{\zeta - \lambda_v}{\zeta + \gamma_v} \prod_{v=1}^n \frac{\zeta + \gamma_v}{\zeta - \lambda_v} \frac{-d\zeta}{(\zeta - \lambda_m)(\zeta + \gamma_n)}. \end{aligned} \quad (9'')$$

При $m \neq n$ подынтегральная рациональная функция стремится к нулю в бесконечности не менее быстрее, чем $O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$, а справа от линии $(\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$ особых точек не имеет.

Поэтому интеграл правой части обращается в нуль, значит

$$\int_0^{\infty} \hat{\chi}_m(x) \hat{\chi}_n^*(x) dx = 0 \text{ при } m \neq n.$$

Пусть теперь $m = n$, тогда в правой части после сокращения в подынтегральном выражении получим

$$\int_0^{\infty} \hat{\chi}_m(x) \hat{\chi}_n^*(x) dx = \hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n^* \frac{1}{2\pi i} \int \frac{-d\zeta}{(\zeta - \lambda_n)(\zeta + \gamma_n)},$$

где полюсы в точках $\zeta = \lambda_n$ и $\zeta = -\gamma_n$ находятся на разных сторонах линии интегрирования $(\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$. Поэтому имеет место равенство

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta - \lambda_n)(\zeta + \gamma_n)} = \frac{1}{\lambda_n + \gamma_n}, \quad -\gamma_n < \sigma < \lambda_n.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \hat{\chi}_m(x) \hat{\chi}_n^*(x) dx = \frac{(\lambda_n + \gamma_n)^{1/2} (\lambda_n + \gamma_n)^{1/2}}{\lambda_n + \gamma_n} = 1.$$

Теорема 1.1 доказана.

Если обозначить

$$R_k(\zeta) = \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta - \lambda_v)}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \gamma_v)}, \quad R_k^*(\zeta) = \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta - \gamma_v)}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \lambda_v)}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (10)$$

где последовательности чисел $\{\gamma_v\}$ и $\{\lambda_v\}$ определены в (1) и (5), то, учитывая, что и $\{R_k(\zeta)\}$ и $\{R_k^*(\zeta)\}$ принадлежат классу функций $L^2(-\infty, \infty)$ в правой полуплоскости, имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{mn} &= \frac{\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n^*}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} R_m(\zeta) \overline{R_n^*(\zeta)} d\zeta = \frac{\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n^*}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{v=0}^{m-1} (\zeta - \lambda_v)}{\prod_{v=0}^m (\zeta + \gamma_v)} \cdot \frac{\prod_{v=0}^{n-1} \overline{(\zeta - \gamma_v)}}{\prod_{v=0}^n \overline{(\zeta + \lambda_v)}} d\zeta = \\ &= \frac{\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n^*}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{v=0}^{m-1} (iy - \lambda_v)}{\prod_{v=0}^m (iy + \gamma_v)} \cdot \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (-iy - \gamma_v)}{\prod_{v=0}^n (-iy + \lambda_v)} dy = \\ &= \pm \frac{\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n^*}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{v=n+1}^m (\zeta - \lambda_v)}{\prod_{v=n+1}^m (\zeta + \gamma_v)} \frac{d\zeta}{(\zeta - \lambda_m)(\zeta + \gamma_n)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда и очевидно, что $\mathfrak{I}_{m,n} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$ так как при $m = n$

$$\mathfrak{I}_{n,n} = \frac{\hat{\alpha}_n \hat{\alpha}_n^*}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta + \gamma_n)(\zeta - \lambda_n)} = \frac{\hat{\alpha}_n \hat{\alpha}_n^*}{\lambda_n + \gamma_n} = 1.$$

Это значит, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} R_m(\zeta) \overline{R_n^*(\zeta)} d\zeta = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases} \quad (11')$$

если только

$$\hat{\alpha}_n = (\gamma_n + \lambda_n)^{1/2} = \hat{\alpha}_n^*. \quad (12)$$

Таким образом доказана.

Теорема 1.1'. Для определенных в (10) систем функций $\{\hat{R}_n(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_n^*(\zeta)\}$ справедливы равенства (11') при (12).

Перейдем теперь к получению для определенных соответственно в (6), (7) и (10) двух биортогональных систем формулы Кристоффеля-Дарбу.

Речь идет о формулах

$$K_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \hat{\chi}_k(x) \hat{\chi}_k^*(t), \quad (13)$$

$$H_n(z, \zeta) = \sum_{k=1}^n \hat{R}_k(\zeta) \overline{\hat{R}_k^*(z)}, \quad n=1, 2, \dots \quad (14)$$

С помощью известной формулы Р. Лагранжа (см. [2], гл.1, с. 48, (1.57), легко убедиться, что справедливы равенства

$$K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\zeta x} d\zeta \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} e^{t\zeta} \left(\prod_{v=0}^n \frac{\zeta - \lambda_v}{\zeta + \gamma_v} \prod_{v=0}^n \frac{z - \gamma_v}{z + \lambda_v} - 1 \right) \frac{dz}{\zeta + z}, \quad (15)$$

$$H_n(\zeta, z) = \sum_{k=0}^n \hat{R}_k(\zeta) \overline{\hat{R}_k^*(z)} = \left(\prod_{v=0}^n \frac{\zeta - \lambda_v}{\zeta + \gamma_v} \prod_{v=0}^n \frac{z - \gamma_v}{z + \lambda_v} - 1 \right) \frac{dz}{\zeta + \bar{z}}, \quad (16)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Поэтому можно считать доказанными следующие теоремы.

Теорема 1.2. Для определенной в (6), (7) биортогональной на $(0, \infty)$ системы функций $\{\hat{\chi}_k(x)\}$ и $\{\hat{\chi}_k^*(t)\}$ справедлива формула Кристоффеля–Дарбу (15).

Теорема 1.2'. Для определенной в (10) биортогональной на $(-\infty, \infty)$ системы $\{\hat{R}_k(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_k^*(\zeta)\}$ справедлива формула Кристоффеля–Дарбу (16).

§ 2. Случай комплексных последовательностей $\{\gamma_v\}$ и $\{\lambda_v\}$.

Ниже покажем, что теоремы 1.1, 1.1', 1.2, 1.2' останутся в силе, если вместо последовательностей (1) и (5) рассмотреть пару последовательностей комплексных чисел $\{\gamma_v\}$ и $\{\lambda_v\}$:

$$0 < \operatorname{Re} \gamma_0 < \operatorname{Re} \gamma_1 \leq \operatorname{Re} \gamma_2 \leq \dots, \quad (17)$$

$$0 < \operatorname{Re} \lambda_0 < \operatorname{Re} \lambda_1 \leq \operatorname{Re} \lambda_2 \leq \dots. \quad (18)$$

Начнем с рассмотрения биортогональности систем функций $\{\hat{R}_n(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_n^*(\zeta)\}$, где

$$\hat{R}_n(\zeta) = \hat{\alpha}_n \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta - \bar{\lambda}_v)}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)}, \quad \hat{\alpha}_n = \sqrt{\gamma_n + \bar{\lambda}_n}, \quad (19)$$

и

$$\hat{R}_n^*(\zeta) = \hat{\alpha}_n^* \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta - \bar{\gamma}_v)}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \lambda_v)}, \quad \hat{\alpha}_n^* = \sqrt{\bar{\gamma}_n + \lambda_n}, \quad (20)$$

где $n = 1, 2, \dots$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{R}_m(\zeta) \overline{\hat{R}_n^*(\zeta)} d\zeta &= \frac{\hat{\alpha}_m \overline{\hat{\alpha}_n}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{v=0}^{m-1} (iy - \bar{\lambda}_v)}{\prod_{v=0}^m (iy + \gamma_v)} \left(\frac{\prod_{v=0}^{n-1} (iy - \bar{\gamma}_v)}{\prod_{v=0}^n (iy + \lambda_v)} \right) i dy = \\ &= \frac{\hat{\alpha}_m \overline{\hat{\alpha}_n}}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{v=0}^{m-1} (iy - \bar{\lambda}_v)}{\prod_{v=0}^m (iy + \gamma_v)} \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (-iy - \gamma_v)}{\prod_{v=0}^n (-iy + \bar{\lambda}_v)} dy. \end{aligned} \quad (21)$$

Оскуда очевидно, что, при 1) $m > n$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{R}_m(iy) \overline{\hat{R}_n^*(iy)} dy = \pm \frac{\hat{\alpha}_m \overline{\hat{\alpha}_n}}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{v=0}^m (iy - \bar{\lambda}_v)}{\prod_{v=n+1}^m (iy + \gamma_v)} \frac{dy}{(iy - \bar{\lambda}_n)(iy + \gamma_n)} = 0,$$

т.к. подынтегральная функция при $y \rightarrow \infty$ убывает со скоростью $O\left(\frac{1}{y^2}\right)$ и,

кроме того, в правой полуплоскости она не имеет особенностей.

Аналогично будет в случае 2) $m < n$, а потому и тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_m(\zeta) \hat{R}_n^*(\zeta) d\zeta = 0. \quad (21')$$

Остается случай 3) $m = n$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_m(\zeta) \overline{\hat{R}_n^*(\zeta)} d\zeta &= \frac{\hat{x}_m \hat{x}_n^*}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{idy}{(iy + \gamma_n)(-iy + \bar{\lambda}_n)} = \\ &= \hat{x}_m \hat{x}_n^* \operatorname{Res}_{iy = -\gamma_n} \frac{1}{(iy + \gamma_n)(-iy + \bar{\lambda}_n)} = \frac{\hat{x}_m \hat{x}_n^*}{\gamma_n + \bar{\lambda}_n} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом доказана

Теорема 2.1'. Для определенных в (19) и (20) систем функций $\{\hat{R}_m(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_n^*(\zeta)\}$ справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_m(\zeta) \overline{\hat{R}_n^*(\zeta)} d\zeta = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (22)$$

Заметим теперь, что для систем функций

$$\hat{\chi}_k(x) = \frac{\hat{x}_k}{2\pi i} \int_c e^{\zeta x} \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta - \bar{\lambda}_v)}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \gamma_v)} d\zeta, \quad \hat{x}_k = (\gamma_k + \bar{\lambda}_k)^{1/2}, \quad (23)$$

$$\hat{\chi}_k^*(x) = \frac{\hat{x}_k^*}{2\pi i} \int_c e^{\zeta x} \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta - \bar{\gamma}_v)}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \lambda_v)} d\zeta, \quad \hat{x}_k^* = (\gamma_k + \bar{\lambda}_k)^{1/2}, \quad (24)$$

по сравнению с (20), согласно равенству Парсеваля, получаем аналог теоремы (2.1').

Теорема 2.1. Для определенных в (23) и (24) систем функций $\{\hat{\chi}_n(x)\}$ и $\{\hat{\chi}_n^*(x)\}$ справедливы равенства

$$\int_0^{\infty} \hat{\chi}_m(\zeta) \overline{\hat{\chi}_n^*(\zeta)} d\zeta = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (25)$$

Этим доказаны биортогональности двух пар систем функций $\{\hat{R}_n(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_n^*(\zeta)\}$, а также $\{\hat{\chi}_n(x)\}$ и $\{\hat{\chi}_n^*(x)\}$.

Ниже будут получены удобные для применения формулы типа формул Кристоффеля-Дарбу для рассматриваемых двух пар биортогональных систем.

Здесь также начнем с пары систем функций $\{\hat{R}_k(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_k^*(\zeta)\}$.

На этот раз нужную формулу получим прямым путем.

Рассмотрим разности вида

$$\frac{\prod_{v=1}^k (\zeta - \bar{\lambda}_v)}{\prod_{v=1}^k (\zeta + \gamma_v)} \frac{\prod_{v=0}^k (z - \bar{\gamma}_v)}{\prod_{v=0}^k (z + \lambda_v)} - \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta - \bar{\lambda}_v)}{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta + \gamma_v)} \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (z - \bar{\gamma}_v)}{\prod_{v=0}^{k-1} (z + \lambda_v)} =$$

$$= \prod_{v=0}^{k-1} \frac{(\zeta - \bar{\lambda}_v)}{(\zeta + \gamma_v)} \overline{\left(\frac{z - \bar{\gamma}_v}{z + \lambda_v} \right)} \left(\frac{\zeta - \bar{\lambda}_k}{\zeta + \gamma_k} \frac{\bar{z} - \gamma_k}{z + \bar{\lambda}_k} - 1 \right). \quad (26)$$

Обозначим

$$\prod_{v=0}^{k-1} \frac{(\zeta - \bar{\lambda}_v)}{(\zeta + \gamma_v)} \overline{\left(\frac{z - \bar{\gamma}_v}{z + \lambda_v} \right)} = \prod_{v=0}^k \frac{(\zeta - \bar{\lambda}_v)}{(\zeta + \gamma_v)} \frac{\bar{z} - \gamma_v}{z + \bar{\lambda}_v} = Q_{n-1}(\zeta, z). \quad (27)$$

Из (26) согласно (27) получим

$$\begin{aligned} Q_k(\zeta, z) - Q_{k-1}(\zeta, z) &= Q_{k-1}(\zeta, z) \left(\frac{\zeta - \bar{\lambda}_k}{\zeta + \gamma_k} \frac{\bar{z} - \gamma_k}{z + \bar{\lambda}_k} - 1 \right) = \\ &= \frac{Q_{k-1}(\zeta, z)}{(\zeta + \gamma_k)(\bar{z} + \bar{\lambda}_k)} (\bar{z} - \zeta \gamma_k - \bar{\lambda}_k \bar{z} - \bar{\lambda}_k \gamma_k - (\zeta \bar{z} + \zeta \bar{\lambda}_k + \gamma_k \bar{z} + \gamma_k \bar{\lambda}_k)) = \\ &= \frac{Q_{k-1}(\zeta, z)}{(\zeta + \gamma_k)(\bar{z} + \bar{\lambda}_k)} \cdot (\gamma_k + \bar{\lambda}_k)(\zeta + \bar{z}) = \\ &= - \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta - \bar{\lambda}_v) \prod_{v=0}^{k-1} (\bar{z} - \gamma_v)}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \gamma_v) \prod_{v=0}^k (\bar{z} + \bar{\lambda}_v)} (\gamma_k + \bar{\lambda}_k)(\zeta + \bar{z}). \end{aligned} \quad (26')$$

Согласно (19) и (20), обозначим еще

$$\hat{R}_k(\zeta) = (\gamma_n + \bar{\lambda}_n)^{1/2} \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta - \bar{\lambda}_v)}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \gamma_v)}, \quad \hat{R}_k^*(\zeta) = (\bar{\gamma}_n + \lambda_n)^{1/2} \frac{\prod_{v=0}^{k-1} (\zeta - \bar{\gamma}_v)}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \lambda_v)}. \quad (28)$$

Тогда получим, что

$$\hat{R}_k(\zeta) \hat{R}_k^*(\zeta) = - \frac{Q_k(\zeta, z) - Q_{k-1}(\zeta, z)}{\zeta + \bar{z}}. \quad (29)$$

Придав в (26) значения $k = 0, 1, 2, \dots, n$ и сложив полученные равенства, получим

$$\sum_{k=0}^n \hat{R}_k(\zeta) \overline{\hat{R}_k^*(\zeta)} = \left(\prod_{v=0}^n \frac{(\zeta - \bar{\lambda}_v)}{(\zeta + \gamma_v)} \overline{\prod_{v=0}^n \frac{(z - \bar{\gamma}_v)}{(z + \lambda_v)}} - 1 \right) \frac{-1}{\zeta + \bar{z}}. \quad (30)$$

Это и будет формула Кристоффеля–Дарбу для биортонормальных систем функций $\{\hat{R}_n(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_n^*(\zeta)\}$ на случай комплексных последовательностей чисел $\{\gamma_v\}$ и $\{\lambda_v\}$, определенных соответственно в (17) и (18).

Таким образом доказана

Теорема 2, 2'. Для определенных в (19) и (20) систем функций $\{\hat{R}_n(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_n^*(\zeta)\}$ справедливы равенства

$$H_n(\zeta, z) = \sum_{k=0}^n \hat{R}_k(\zeta) \overline{\hat{R}_k^*(z)} = \left(\prod_{v=0}^n \frac{(\zeta - \bar{\lambda}_v)}{(\zeta + \gamma_v)} \overline{\prod_{v=0}^n \frac{(z - \bar{\gamma}_v)}{(z + \lambda_v)}} - 1 \right) \frac{1}{\zeta + \bar{z}}. \quad (30')$$

Соответствующая формула Кристоффеля–Дарбу для преобразов систем функций $\{\hat{R}_n(\zeta)\}$ и $\{\hat{R}_n^*(\zeta)\}$ теоремы (2.2') переносится в такую же формулу для систем функций

$$\{\hat{\chi}_n(x)\} \text{ и } \{\hat{\chi}_n^*(x)\}.$$

Следовательно, может считаться доказанной также следующая теорема.

Теорема 2.2 . Для определенных в (23) и (24) систем функций справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^n \hat{\chi}_k(x) \overline{\hat{\chi}_k^*(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\zeta x} d\zeta \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} e^{\bar{z}x} \left(\prod_{v=0}^n \frac{(\zeta - \bar{\lambda}_v)(z - \bar{\gamma}_v)}{(\zeta + \gamma_v)(z + \lambda_v)} - 1 \right) \frac{-dz}{\zeta + \bar{z}},$$

где $\sigma > 0$, $\sigma' > 0$, $x \in [0, \infty)$.

Выражаю глубокую признательность проф. Г.В. Бадалян за постановку задачи и полезные обсуждения.

Кафедра алгебры и геометрии

Поступила 29.03.2001

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадалян Г. В. – Изв. АН Арм. ССР, 1955, т. VIII, № 5, с.1–28 и 1956, т. IX, № 1, с. 3–22.
2. Бадалян Г. В. Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций. М.: Наука, 1990.

Ժ.Ա. ԲԱԲԱՅԱՆ

ՄՅՈՒՆՏՑԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԲԻՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Մյունցի $\{\chi^{\gamma_k}\}$, $\{e^{-\gamma_k x}\}$ (γ_k -երը իրական թվեր են) ֆունկցիաներից կազմված քվադրադանդանների օրթոգոնալ համակարգերը առաջին անգամ ինտեգրալային տեսքով ստացել է Հ. Վ. Բադալյանը [1, 2]: $\{e^{-\gamma_k x}\}$ -ի դեպքում նրանք բերված են հոդվածում (2) ներկայացման տեսքով, ըստ որում, այն մնում է ամփոփոխ մաս ավելի ընդհանուր՝ բազմապատիկ γ_k -երի դեպքում:

Այդ կապակցությամբ երկու աստիճանային հաջորդականությունների վրա հիմնված բիօրթոգոնալ համակարգի կառուցման կարևորությունն այն է, որ $\{e^{-\gamma_k x}\}$ հաջորդականության հետ միասին ստեղծվում է հնարավորություն ազատ ընտրել այնպիսի $\{e^{-\lambda_k x}\}$ հաջորդականություն, որը կարող է շատ բաներում հեշտացնել ֆունկցիաների ներկայացման այդպիսով ստեղծված ապարատի կիրառությունը:

ON A BIORTOGONAL SYSTEM OF MUNTZS FUNCTION

Summary

Muntz quazipolynomial orthogonal systems from the $\{x^{\gamma_k}\}$ and $\{e^{-\gamma_k x}\}$, (γ_k are real numbers) have been for the first time derived in an integral representation by H.V. Badalian [1, 2]. In the case of $\{e^{-\gamma_k x}\}$ they are considered in the article as (2) which remains without change in a more general case for multiple γ_k .

In this connection the importance of developing a two power sequences based biorthogonal system is that together with the sequence $\{e^{-\gamma_k x}\}$ it creates a possibility of free selection another sequence $\{x^{\gamma_k}\}$ simplifying the application of functions representation apparatus.