ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2002 Естественные науки

Математика

УДК 514.75

В.А. НЕРСЕСЯН

ДОПУСТИМЫЕ КОМПЛЕКСЫ ТРЕХМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{P}^6$ (II)

В работе продолжается изучение допустимых комплексов трехмерных плоскостей в шестимерном пространстве $\mathbf{P}^6$, начатое в [1]. Доказывается, что однопараметрическое семейство конусов второго порядка с трехмерными плоскими образующими и одномерной вершиной, которая описывает развертывающуюся поверхность, определяет четырехпараметрическое допустимое семейство плоскостей E^3. Ими являются все трехмерные образующие к этим конусам. Также доказывается, что если взять в пространстве $\mathbf{P}^6$ четырехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей, содержащих фиксированную прямую l и касающихся двух гиперконусов с общей одномерной вершиной l, то получим допустимое семейство трехмерных плоскостей. Соответствующее семейство касательных четырехмерных плоскостей образовано пересечениями касательных гиперплоскостей к конусам – в точках касания с ними трехмерной плоскости.

I. Пусть $\{A_0,\dots,A_6\}$ – репер пространства $\mathbf{P}^6$. Как известно (см. [2]), уравнения инфинитезимального перемещения репера в пространстве $\mathbf{P}^6$ имеют вид $dA_i=\omega_i^j A_j$, $i,j,l=0,\dots,6$, где формы ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям $d\omega_i^j=\omega_i^l\wedge\omega_l^j$. Главными на семействе трехмерных плоскостей, натянутых на точки A_0, A_N, A_3, являются формы

$$\omega_0^4,\omega_0^\alpha,\omega_N^4,\omega_N^\alpha,\omega_3^4,\omega_3^\alpha,\ N=1;2,\ \ \alpha,\beta=5;6,$$

а на семействе четырехмерных плоскостей, натянутых на точки A_0, A_ξ, – формы $\omega_0^\alpha,\omega_\xi^\alpha$, $\xi=1;2;3;4$.

Пусть K – четырехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей E^3. Точку $Q\in\mathbf{P}^6$ назовем нефокальной, если через нее проходит однопараметрическое семейство трехмерных плоскостей E^3, т.е. конус K_Q – четырехмерный. Пусть семейство K допустимое. Обозначим через $\pi(E^3)$ касательную плоскость к семейству K вдоль плоскости E^3, а через π – семейство плоскостей $\pi(E^3)$. Канонизируем репер так, чтобы точки $A_0, A_N, A_3\in E^3$, а $A_0, A_\xi\in\pi(E^3)$. Будем считать формы ω_0^5,ω_1^6 линейно независимыми. Тогда формы $\omega_0^5,\omega_1^6,\omega_4^\alpha$ образуют базис на семействе π. Условие допустимости семейства K означает, что на выбранном семействе реперов выполняются уравнения (см. [1])

$$\omega_1^5 = 0, \quad \omega_2^5 = A_{16}^{51}\omega_1^6, \quad \omega_3^5 = 0, \quad \omega_0^6 = 0, \quad \omega_2^6 = 0, \quad \omega_3^6 = A_{35}^{60}\omega_0^5. \tag{1}$$

В статье [1] мы изучали случай, когда $A_{16}^{51} \neq 0, A_{35}^{60} \neq 0$.

2. Пусть среди коэффициентов A_{16}^{51} и A_{35}^{60} только один отличен от нуля. Всегда можем считать, что $A_{16}^{51} = 0$. Тогда канонизацией репера можно коэффициент A_{35}^{60} привести к единице, а уравнения (1) примут вид

$$\omega_1^5 = 0, \quad \omega_2^5 = 0, \quad \omega_3^5 = 0, \quad \omega_0^6 = 0, \quad \omega_2^6 = 0, \quad \omega_3^6 = \omega_0^5. \tag{2}$$

Если продифференцировать уравнения (2) внешним образом и применить к ним лемму Картана, то получим, что

$$\begin{cases}
\omega_1^0 = m\omega_0^5 + n\omega_1^6 + l\omega_4^5, & -\omega_6^5 = n\omega_0^5 + g\omega_1^6 + s\omega_4^5,\\
\omega_1^4 = l\omega_0^5 + s\omega_1^6 + q\omega_4^5, & \omega_2^0 = \alpha\omega_0^5 + C\omega_4^5,\\
\omega_3^0 - \omega_6^5 = Q\omega_0^5 + L\omega_4^5, & \omega_3^4 = L\omega_0^5 - p\omega_4^5,\\
\omega_0^3 - \omega_5^6 = a\omega_0^5 + b\omega_1^6 + c\omega_4^6, & \omega_0^1 = b\omega_0^5 + t\omega_1^6 + h\omega_4^6,\\
\omega_0^4 = c\omega_0^5 + h\omega_1^6 + p\omega_4^6, & \omega_2^3 = A\omega_0^5 + B\omega_1^6 + C\omega_4^6,\\
\omega_2^1 = B\omega_0^5 + D\omega_1^6, & \omega_3^1 = \pi\omega_0^5 + \mu\omega_1^6 - h\omega_4^5,\\
\omega_3^3 - \omega_6^6 - \omega_0^0 + \omega_5^5 = \sigma\omega_0^5 + \pi\omega_1^6 - c\omega_4^5 + L\omega_4^6 & \omega_2^4 = C\omega_0^5.
\end{cases}$$

Рассмотрим формы, которые смещают нашу трехмерную плоскость, т.е. $\omega_0^4, \omega_1^4, \omega_2^4, \omega_3^4$. Сначала дифференцируем уравнение $\omega_2^4 = C\omega_0^5$ внешним образом. В частности получим, что $pC = 0$. Если $p = 0$, то имеем $\omega_0^4 = c\omega_0^5 + h\omega_1^6$, $\omega_2^4 = C\omega_0^5$, $\omega_3^4 = L\omega_0^5$. А это значит, что семейство трехмерных плоскостей E^3 зависит не более чем от трех параметров, что противоречит нашему предположению. Значит $p \neq 0, C = 0$, а также $\alpha = 0$. Теперь дифференцируем остальные уравнения

$$\omega_0^4 = c\omega_0^5 + h\omega_1^6 + p\omega_4^6, \quad \omega_1^4 = l\omega_0^5 + s\omega_1^6 + q\omega_4^5, \quad \omega_3^4 = L\omega_0^5 - p\omega_4^5.$$

Выражения $\Delta c, \Delta h, \ldots, \Delta p$ ковариантных дифференциалов соответствующих функций показывают, что репер можно канонизировать так, чтобы коэффициенты $p = 1, c = 0, h = 0, s = 0, q = 0, L = 0$. Имеем также $A = 0, B = 0, lD = 0$. Раскрывая результат дифференцирования по лемме Картана, получим, что

$$\begin{cases}
\omega_5^4 + \omega_3^3 = a_1\omega_0^5 + a_2\omega_1^6 + a\omega_4^5 + a_3\omega_4^6, & \omega_4^1 = a_2\omega_0^5 + a_4\omega_1^6 + b\omega_4^5 + a_5\omega_4^6,\\
2\omega_4^4 - \omega_0^0 - \omega_6^6 = a_3\omega_0^5 + a_5\omega_1^6 + a_6\omega_4^6, & \omega_6^4 = b_1\omega_1^6 + b_2\omega_4^5 - n\omega_4^6,\\
\omega_1^3 = b_2\omega_1^6 + b_3\omega_4^5, & \omega_4^0 - \omega_6^4 = u_1\omega_0^5 + u_2\omega_4^5 + Q\omega_4^6,\\
2\omega_4^4 - \omega_5^5 - \omega_3^3 = U_2\omega_0^5 + u_3\omega_4^5, & m = 0.
\end{cases}$$

Из уравнения $\omega_2^3 = 0$ получаем $\omega_1^3 = \lambda\omega_1^6$. Тогда $b_3 = 0, b_2 = \lambda$. Непосредственное вычисление показывает, что уравнение $\omega_1^6 = 0$ вполне интегрируемое. Изучая уравнение

$$\omega_3^0 - \omega_6^5 = Q\omega_0^5, \quad \omega_0^3 - \omega_5^6 = a\omega_0^5, \quad \omega_3^3 - \omega_6^6 - \omega_0^0 + \omega_5^5 = \sigma\omega_0^5,$$

а также результаты их продолжений, мы приходим к вполне интегрируемой системе, что опять приводит к теореме (см. [1]). Но у нас вдобавок $\omega_2^0 = 0$. Это означает, что вершина конуса описывает развертывающуюся поверхность, т.к. прямые $(A_1 A_2)$ являются касательными к кривой, которая описывается точкой A_2.

3. Пусть теперь оба коэффициента A_{16}^{51} и A_{35}^{60} в уравнениях (1) равны нулю. Тогда имеем, что
$$\omega_1^5 = 0, \quad \omega_2^5 = 0, \quad \omega_3^5 = 0, \quad \omega_0^6 = 0, \quad \omega_2^6 = 0, \quad \omega_3^6 = 0. \qquad (3)$$
Дифференцируя уравнения (3) внешним образом и применяя к ним лемму Картана, получим, что
$$\begin{cases} \omega_2^0 = \alpha\omega_0^5, & \omega_1^0 = m\omega_0^5 + n\omega_1^6 + l\omega_4^5, \\ \omega_2^4 = 0, & -\omega_6^5 = n\omega_0^5 + g\omega_1^6 + s\omega_4^5, \\ \omega_3^0 = Q\omega_0^5, & \omega_1^4 = l\omega_0^5 + s\omega_1^6 + q\omega_4^5, \\ \omega_3^4 = 0, & -\omega_5^6 = a\omega_0^5 + b\omega_1^6 + c\omega_4^6, \\ \omega_2^1 = B\omega_1^6, & \omega_0^1 = b\omega_0^5 + t\omega_1^6 + h\omega_4^6, \\ \omega_3^1 = \pi\omega_1^6, & \omega_0^4 = c\omega_0^5 + h\omega_1^6 + p\omega_4^6. \end{cases} \qquad (4)$$
Сначала дифференцируем уравнение $\omega_3^4 = 0$. Получим, что $pQ = 0, q\pi = 0$. Если бы $p = 0$, то семейство трехмерных плоскостей E^3 зависило бы от трех параметров. Это противоречит нашему предположению. Поэтому $p \neq 0$. По той же причине $q \neq 0$. Но тогда $Q = 0, \pi = 0$. Дифференцируем теперь уравнение $\omega_2^4 = 0$. Получим, что $\alpha = 0, B = 0$. Дифференцируя формы ω_0^4 и ω_1^4 внешним образом, получим следующие уравнения:
$$\begin{cases} \Delta c \wedge \omega_0^5 + \Delta h \wedge \omega_1^6 + \left(q\omega_0^1 - c\omega_0^4 + p\omega_5^6\right) \wedge \omega_4^5 + \Delta p \wedge \omega_4^6 = 0, \\ \Delta l \wedge \omega_0^5 + \Delta s \wedge \omega_1^6 + \Delta q \wedge \omega_4^5 + \left(p\omega_1^0 - s\omega_1^4 + q\omega_6^5\right) \wedge \omega_4^6 = 0, \end{cases}$$
где $\Delta c, \Delta h, \ldots, \Delta q,$ – ковариантные дифференциалы соответствующих функций. Их выражения показывают, что репер можно канонизировать так, чтобы $c = h = l = s = 0, p = 1, q = 1$. Тогда уравнения (4) примут вид $\omega_2^0 = 0$, $\omega_1^0 = m\omega_0^5 + n\omega_1^6$, $\omega_2^4 = 0$, $-\omega_6^5 = n\omega_0^5 + g\omega_1^6$, $\omega_3^0 = 0$, $\omega_3^4 = 0$, $-\omega_5^6 = a\omega_0^5 + b\omega_1^6$, $\omega_2^1 = 0$, $\omega_1^4 = \omega_4^5$, $\omega_0^1 = b\omega_0^5 + t\omega_1^6$, $\omega_3^1 = 0$, $\omega_0^4 = \omega_4^6$. Выясним геометрию этих уравнений. Уравнения $\omega_2^0 = 0$, $\omega_2^1 = 0$, $\omega_2^4 = 0$, $\omega_2^5 = 0$, $\omega_2^6 = 0$, $\omega_3^0 = 0$, $\omega_3^1 = 0$, $\omega_3^4 = 0$, $\omega_3^5 = 0$, $\omega_3^6 = 0$ показывают, что прямая $(A_2 A_3)$ неподвижна и наше семейство трехмерных плоскостей содержит эту прямую.

Известно, что многообразие двумерных плоскостей в проективном пространстве $\mathbf{P}^6$, содержащих данную прямую, имеет структуру проективного пространства $\mathbf{P}^4$. Наше семейство трехмерных плоскостей сводится к четырехпараметрическому семейству прямых в этом $\mathbf{P}^4$, допустимому в нашем смысле, т.е. такому, что при фиксации нефокальной точки получим конус, касательная двумерная плоскость к которому не зависит от выбора точки на прямой. Действительно, всякий репер нашего семейства в пространстве $\mathbf{P}^6$ определяет репер в $\mathbf{P}^4$ из точек $\overline{A}_0, \overline{A}_1, \overline{A}_4, \overline{A}_5, \overline{A}_6$ с теми же структурными уравнениями, но с исключением форм, содержащих индексы 2 и 3. Уравнения нашего комплекса прямых будут $\omega_1^5 = 0$, $\omega_0^6 = 0$, $\omega_1^4 = \omega_4^5$, $\omega_1^0 = m\omega_0^5 + n\omega_1^6$, $-\omega_6^5 = n\omega_0^5 + g\omega_1^6$, $\omega_0^4 = \omega_4^6$, $-\omega_5^6 = a\omega_0^5 + b\omega_1^6$,

$\omega_0^1 = b\omega_0^5 + t\omega_1^6$. Первые два уравнения показывают, что наши прямые $\left(\overline{A}_0\overline{A}_1\right)$ касаются двух гиперповерхностей в точках $\overline{A}_0$ и $\overline{A}_1$. Соотвествующие касательные гиперплоскости $\left(\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_4\overline{A}_5\right)$ и $\left(\overline{A}_1\overline{A}_0\overline{A}_4\overline{A}_6\right)$ пересекаются по двумерной плоскости $\left(\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_4\right)$. Докажем теперь обратное утверждение. Рассмотрим четырехпараметрическое семейство прямых в пространстве $\mathbf{P}^4$, касающихся двух гиперповерхностей. Пусть прямая натянута на точки (A_0A_1), причем точка A_0 описывает первую гиперповерхность, а точка A_1 – вторую. Выберем семейство реперов так, чтобы касательная плоскость в точке к первой гиперповерхности была натянута на $(A_0A_1A_4A_5)$, а ко второй – на $(A_1A_0A_4A_6)$. Они пересекаются по двумерной плоскости $(A_0A_1A_4)$. При таком выборе семейства реперов имеем $\omega_0^6 = 0, \omega_1^5 = 0$. Покажем, что наше семейство прямых допустимое. Пусть $P = x^0A_0 + x^1A_1$ – произвольная нефокальная точка на прямой (A_0A_1). Тогда $dP = \left(dx^0 + x^1\omega_1^0\right)A_0 + \left(dx^1 + x^0\omega_0^1\right)A_1 + \left(x^0\omega_0^4 + x^1\omega_1^4\right)A_4 + x^0\omega_0^5A_5 + x^1\omega_1^6A_6 = \theta P$, откуда получим, что $\omega_0^5 = 0$, $\omega_1^6 = 0$, $x^0\omega_0^4 + x^1\omega_1^4 = 0$. При этом касательная плоскость в любой другой точке $Q = y^0A_0 + y^1A_1\left(y^0 \neq 0 \neq y^1\right)$ также будет совпадать с плоскостью $(A_0A_1A_4)$. Таким образом, семейство всех прямых в пространстве $\mathbf{P}^4$, касающихся двух гиперповерхностей, – допустимое семейство. Это семейство зависит от пяти параметров и дает в пространстве $\mathbf{P}^6$ пятипараметрическое допустимое семейство трехмерных плоскостей. Теперь достаточно выделить из него произвольное четырехпараметрическое подсемейство.

Итак, нами доказана следующая теорема:

Теорема. Если взять в пространстве $\mathbf{P}^6$ четырехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей, содержащих фиксированную прямую l и касающихся двух гиперконусов с общей одномерной вершиной l, получим допустимое семейство трехмерных плоскостей. Соответствующее семейство касательных четырехмерных плоскостей образовано пересечениями касательных гиперплоскостей к конусам в точках касания с ними трехмерной плоскости семейства.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 18.01.2001*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нерсесян В.А.** – Ученые записки ЕГУ, 2001, №3, с. 35-39.
2. **Фиников С.П.** Проективная дифференциальная геометрия. М.– Л., 1937.
3. **Нерсесян В.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1986, №2, с.34–38.

Վ.Ա. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

P^6 ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՌԱՉԱՓ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹՈՒՅԼԱՏՐԵԼԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍՆԵՐԸ. II

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են եռաչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսները P^6 պրոյեկտիվ տարածության մեջ: Ապացուցվում է, որ մեկ պարամետրից կախված երկրորդ կարգի կոների ընտանիքը եռաչափ ծնիչներով և միաչափ գագաթով, որը գծում է փռվող մակերևույթ, որոշում է չորս պարամետրերից կախված E^3 հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքս:

Ապացուցվում է նաև, որ եթե P^6 տարածությունում վերցնենք ֆիքսված l ուղիղը պարունակող և այն որպես ընդհանուր գագաթ ունեցող երկու հիպերկոներին շոշափող չորս պարամետրերից կախված եռաչափ հարթությունների ընտանիք, ապա կստանանք եռաչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքս:

V. A. NERSESIAN

POSSIBLE COMPLEXES OF THREE-DIMENSIONAL PLANES IN PROJECTIVE SPACE P^6. II

Summary

In the work possible complexes of three-dimensional planes in six-measured projective space P^6 are studied. It's proved that one-parametric family of cones of second order with three-dimensional flats forming and univariate top which describes unfold surface defines four-parametric possible family of planes E^3 which are all three-dimensional forming to this cones.

It's also proved that if we take in space P^6 four-parametric family of three-dimensional planes including fixed straight line l and touching two hypercone with one general univariate top l we will get possible family of three-dimensional planes. Corresponding family tangent of four-parametric family is formed by intersection of tangent hyperplanes to the cones in the sport of osculation of three-dimensional planes family with them.