

УДК 517.5

Г.А. БАГДАСАРОВА

КРИТЕРИИ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ КОМПАКТНЫХ
ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть X – локально выпуклое пространство, A – компактное выпуклое подмножество X , $E_n A$, $n \geq 1$, – множество всех n -крайних точек множества A .

В настоящем сообщении для множества A в терминах множеств $E_n A$ сформулированы и доказаны критерии конечномерности A .

1°. Пусть X – локально выпуклое пространство, A – компактное выпуклое подмножество X .

Определение 1. Точки $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ из X аффинно-независимы, если точки $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_{m+1} - x_1$ линейно независимы.

Аффинная независимость точек $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ эквивалентна следующему факту: из системы уравнений $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \cdot x_k = 0$, $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k = 0$ следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m+1} = 0$ (см. [1], с. 130).

Определение 2. Множество A имеет размерность n , если в A имеется n (имеется $n+1$) и не имеется $n+1$ (не имеется $n+2$) линейно независимых (аффинно-независимых) точек из X .

Понятие крайней точки множества A (см. [1]) позволяет формулировать с ее помощью критерии конечномерности множества A . Пусть $D_{n+1} A$, $n \geq 1$, – множество выпуклых комбинаций не более чем n крайних точек A . Тогда (см. [2]) для конечномерности A необходима и достаточна выпуклость $D_{n+1} A$ при некотором n .

В работе [3] введено понятие n -крайней точки, обобщающее понятие крайней точки.

Определение 3. Точка $x \in A$ называется n -крайней точкой A , если не существуют аффинно-независимые точки $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ из A и положительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$, такие, что $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot x_k = 1$.

Пусть $E_n A$ – множество n -крайних точек A . Тогда $E_1 A$ – множество крайних точек A .

Определение 3 равносильно следующему факту: точка $x \in A$ является n -крайней точкой A , если она не представима в виде среднего арифме-

тического аффинно-независимых $n+1$ точек из A . ♦

В настоящем сообщении доказываются следующие два критерия конечномерности A в терминах множеств $E_n A$, $n \geq 1$.

Теорема 1. Для конечномерности A необходимо и достаточно существование числа n , для которого $E_{n+1} A$ выпукло. Более того, минимальное n , для которого $E_{n+1} A$ выпукло, совпадает с $\dim A$, где $\dim A$ – размерность A .

Теорема 2. Пусть A имеет счетную базу. Тогда для конечномерности A необходимо и достаточно существование числа n такого, что

$$E_{n+1} A = E_{n+2} A = \dots \quad (1)$$

и множество $E_{n+1} A$ замкнуто.

Замечание 1. Из определения 3 следует

$$E_1 A \subseteq E_2 A \subseteq \dots \quad (2)$$

С другой стороны (см. [3]),

$$E_{n+1} A \subseteq D_{n+1} A, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

Поэтому теорема 1 сильнее вышесформулированного утверждения из [2]. ♦

2°. Мы используем следующие факты из [3–4].

а) Если A конечномерно, то

$$\text{Int } A = E_{\dim A + 1} A \setminus E_{\dim A} A, \quad \partial A = E_{\dim A} A, \quad (4)$$

где $\text{Int } A$ и ∂A – множества внутренних и граничных точек A соответственно.

б) Если A содержит счетную базу, то

$$A = \overline{\bigcup_{n \geq 1} E_n A} \quad (5)$$

в смысле топологии пространства X , где верхняя линия означает знак замыкания.

Докажем теорему 1. Пусть $\dim A = n$. Из (4) следует

$$A = E_{n+1} A, \quad (6)$$

что влечет выпуклость $E_{n+1} A$.

Обратно, пусть $E_{n+1} A$ выпукло при некотором n . Согласно (2)

$E_1 A \subseteq E_{n+1} A$. Поэтому $D_{m+1} A \subseteq E_{n+1} A$ при всех $m \geq 1$. В частности $D_{n+1} A \subseteq E_{n+1} A$, что вместе с (3) влечет $D_{n+1} A = E_{n+1} A$. По вышеприведенному критерию конечномерности A в терминах $D_n A$, A конечномерно.

Докажем второе утверждение теоремы 1. Если $\dim A = n$, то в силу (4) верно (6) и $E_{n+1} A$ выпукло. Допустим, найдется $k < n$ такое, что $E_{k+1} A$ выпукло. Тогда, как показано выше, $A = E_{k+1} A$ и из-за $n > k$ $E_{n+1} A \setminus E_n A$ пусто. Согласно (4) $\text{Int } A$ пусто. Это противоречит наличию внутренних точек у конечномерного выпуклого A .

Обратно, пусть n – минимальное число, для которого $E_n A$ выпукло. Тогда, как показано выше, верно (6) и $\dim A \leq n$. Если $\dim A < n$, то $E_{\dim A + 1} A$ выпукло. Это противоречит минимальности n . ♦

Докажем теорему 2. Если $\dim A = n$, то верно (6). Из компактности A следует замкнутость A , а из (см. (2)) $A = E_{n+1}A \subseteq E_{n+2}A \subseteq \dots \subseteq A$ следует (1). Более того, имеет место строгое включение $E_n A \subset E_{n+1}A$. Действительно, если $E_n A = E_{n+1}A$, то верно (6) и $E_n A$ выпукло. Значит, $\dim A < n$. Поэтому $\dim A$ – минимальное n , для которого верно (1).

Обратно, если $E_{n+1}A$ замкнуто и верно (1), то в силу (5) справедливо (6). Если в A найдется $n+2$ аффинно-независимых точек, то их среднее арифметическое не будет принадлежать $E_{n+1}A$. Значит, $A \setminus E_{n+1}A$ непусто, что противоречит (6).

Итак, $\dim A \leq n$. Если $\dim A < n$, где n – минимальное число в (1), то в силу необходимости теоремы 2 $E_n A$ замкнуто и (1) верно с заменой n на $n-1$. Это противоречит минимальности n . ♦

Приношу признательность профессору Э.А. Даниеляну за внимание к настоящему сообщению.

Кафедра математических методов
и моделирования

Поступило 06.11.2001

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975, 443с.
2. Багдасарова Г.А. О конечномерности компактных выпуклых подмножеств локально выпуклого пространства. – Материалы конф. по прикл. и промыш. мат. Йошкар-Ола, 2001, 1–6 декабря.
3. Даниелян Э.А., Мовсисян Г. С., Таталян К. Р. – ДАН Арм. ССР, 1991, 92, №2, с. 69–75.
4. Даниелян Э.А., Мовсисян Г.С. Замечание к теореме Крейна–Мильмана. В сб.: Вероятность и оптимизация. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1991, т.1, с. 20–24.

Գ.Ա. ԲԱԴԴԱՍԱՐՈՎԱ

ԿՈՄՊԱԿՏ ՈՒՌՈՒՅԻՎ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՓՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Ամփոփում

Դիցուք X -ը՝ լոկալ ուռուցիկ տարածություն է, A -ն՝ X -ի կոմպակտ ուռուցիկ ենթաբազմություն, $E_n A$ -ն՝ A -ի n -ծայրակետերի բազմությունն է:

Աշխատանքում $E_n A$ բազմությունների տերմիններով ձևակերպված և ապացուցված են A բազմության վերջավոր չափողականության երկու հայտանիշներ:

G.A. BAGHDASAROVA

CRITERIA OF COMPACT CONVEX SETS' FINITE DIMENSIONALITY

Summary

Let A be a compact convex subset of a locally convex X space, $E_n A$, $n \geq 1$, be a set on n -extremality points of the A set.

In the present note criteria of the A set's finite dimensionality are formulated and proved in terms of the $E_n A$ sets.