

Информатика

УДК 510.635+510.644

О.Р. БОЛИБЕКЯН

ТРЕХЗНАЧНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ С СИМВОЛОМ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В статье рассматриваются вопросы эквивалентности трехзначных исчислений симметрической конструктивной логики предикатов с символом неопределенности. Для одного из исчислений доказана теорема об устранении смешений.

В работе [1] определены некоторые секвенциальные и сверхсеквенциальные исчисления предикатов и исследованы их взаимосвязи. В [2] введено формульное исчисление предикатов с символом неопределенности и рассмотрены некоторые его свойства. В данной работе исследуются формульное, сверхсеквенциальное и сверхкортежное исчисления предикатов с символом неопределенности (HLE, GLE, GLE^*), рассматриваются вопросы их формульной равнообъемности, а также теорема об устранении смешений для сверхкортежного исчисления GLE^* .

В настоящей работе будем придерживаться общепринятых определений предметной переменной, терма, элементарной формулы, предикатной формулы и подстановки [3]. Сверхформулы вводятся как номера слов вида A^+ , A^- , $A^\bullet$, $A^\times$, где A есть произвольная формула, при этом A^+ именуется положительно ориентированной сверхформулой, A^- – отрицательно ориентированной, $A^\bullet$ – неположительно ориентированной, $A^\times$ – неотрицательно ориентированной. Формульные кортежи определяются как номера слов вида $A_1, A_2, \dots, A_n$, где $n \geq 0$ и все A_i суть формулы (при $n = 0$ кортеж $A_1, A_2, \dots, A_n$ определяется как номер пустого слова). Секвенции определяются как номера слов вида $u \rightarrow v$, где u – кортеж, v – формула или пустое слово. Сверхкортежи и сверхсеквенции определяются на основе сверхформул так же, как кортежи и секвенции на основе формул. Будем говорить, что формула A выводима в сверхсеквенциальном (сверхкортежном) исчислении, если сверхсеквенция $\rightarrow A^+$ (сверхкортеж A^+) выводима в этом исчислении. Следуя [1], введем также понятие формульной равнообъемности исчислений. Будем говорить, что два исчисления формульно равнообъемны, если всякая формула, выводимая в одном из них, выводима и в другом. Две формулы называются конгруэнтными, если их можно получить друг из друга посредством допустимого переименования связанных переменных. Два исчисления называются конгруэнтно формульно равнообъемными, если для всякой формулы, выводимой в одном из этих

можно построить конгруэнтную ей формулу, выводимую во втором исчислении. Аналогично вводятся понятия конгруэнтной равнообъемности для исчислений других типов. В дальнейшем $\tilde{\forall}$ будем использовать для обозначения произвольного (быть может, пустого) набора кванторов общности относительно произвольных предметных переменных.

Следуя [2], определим формульное исчисление предикатов HLE с символом неопределенности E трехзначной логики Лукасевича со схемами аксиом $(HLE_1) - (HLE_{23})$ и правилом вывода (HLE_{24}) , где A и B – произвольные формулы, x – произвольная предметная переменная, а T – произвольный терм. Кроме того, предполагается, что в (HLE_{15}) и (HLE_{18}) переменная x не входит свободно в A , в (HLE_{14}) и (HLE_{17}) – подстановка $[A]_T^x$ допустима.

$\tilde{\forall}(A \supset (B \supset A))$	(HLE_1)
$\tilde{\forall}((A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)))$	(HLE_2)
$\tilde{\forall}((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$	(HLE_3)
$\tilde{\forall}((A \supset (A \supset B)) \supset ((\neg B \supset (\neg B \supset \neg A)) \supset (A \supset B)))$	(HLE_4)
$\tilde{\forall}((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$	(HLE_5)
$\tilde{\forall}(A \supset \neg\neg A)$	(HLE_6)
$\tilde{\forall}(\neg\neg A \supset A)$	(HLE_7)
$\tilde{\forall}(A \& B \supset A)$	(HLE_8)
$\tilde{\forall}(A \& B \supset B)$	(HLE_9)
$\tilde{\forall}((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A \& B)))$	(HLE_{10})
$\tilde{\forall}(A \supset A \vee B)$	(HLE_{11})
$\tilde{\forall}(B \supset A \vee B)$	(HLE_{12})
$\tilde{\forall}((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)))$	(HLE_{13})
$\tilde{\forall}(\forall x A \supset [A]_T^x)$	(HLE_{14})
$\tilde{\forall}(A \supset \forall x A)$	(HLE_{15})
$\tilde{\forall}(\forall x (A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B))$	(HLE_{16})
$\tilde{\forall}([A]_T^x \supset \exists x A)$	(HLE_{17})
$\tilde{\forall}(\exists x A \supset A)$	(HLE_{18})
$\tilde{\forall}(\forall x (A \supset B) \supset (\exists x A \supset \exists x B))$	(HLE_{19})
$\tilde{\forall}(\forall x (A \supset (A \supset B)) \supset (\exists x A \supset (\exists x A \supset \exists x B)))$	(HLE_{20})
$\tilde{\forall}(((A \supset \neg A) \supset \neg(A \supset \neg A)) \supset A)$	(HLE_{21})
$E \supset \neg E$	(HLE_{22})
$\neg E \supset E$	(HLE_{23})
$\frac{A, A \supset B}{B}$	(HLE_{24})

Введем ориентированно-секвенциальное исчисление GLE . В схемах аксиом и правилах вывода этого исчисления A и B суть произвольные формулы, ε и δ суть знаки $+$ или $-$, Γ и Δ – произвольные сверхкортежи, T – произвольный терм, x и y – произвольные предметные переменные, а θ – пустой сверхкортеж или произвольная сверхформула. В правилах вывода (GLE_{20}) и (GLE_{26}) предполагается, что переменная y не входит свободно в Γ и, кроме того, y совпадает с x или не входит свободно в A . В правилах вывода (GLE_{23}) и (GLE_{25}) предполагается, что y не входит свободно в Γ , Δ и θ и, кроме того, y совпадает с x или не входит свободно в A . В правилах (GLE_{20}) – (GLE_{27}) предполагается, что все рассматриваемые подстановки допустимы.

$$\begin{array}{l}
\Gamma, A^+ \rightarrow B^+ \\
\frac{\Gamma, B^- \rightarrow A^-}{\Gamma \rightarrow (A \supset B)^+} (GLE_1) \\
\Gamma, \Delta \rightarrow B^- \\
\frac{\Gamma, A^-, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (A \supset B)^+, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_3) \\
\frac{\Gamma, A^+, B^-, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (A \supset B)^-, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_5) \\
\frac{\Gamma, A^+, B^+, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (A \& B)^+, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_7) \\
\frac{\Gamma \rightarrow B^-}{\Gamma \rightarrow (A \& B)^-} (GLE_9) \\
\frac{\Gamma \rightarrow A^+}{\Gamma \rightarrow (A \vee B)^+} (GLE_{11}) \\
\Gamma, A^+, \Delta \rightarrow \theta \\
\frac{\Gamma, B^+, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (A \vee B)^+, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{13}) \\
\frac{\Gamma, A^-, B^-, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (A \vee B)^-, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{15}) \\
\frac{\Gamma, A^-, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (\neg A)^+, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{17}) \\
\frac{\Gamma, A^+, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (\neg A)^-, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{19}) \\
\Gamma, \Delta \rightarrow A^+ \\
\frac{\Gamma, B^+, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (A \supset B)^+, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_2) \\
\Gamma \rightarrow A^+ \\
\frac{\Gamma \rightarrow B^-}{\Gamma \rightarrow (A \supset B)^-} (GLE_4) \\
\Gamma \rightarrow A^+ \\
\frac{\Gamma \rightarrow B^+}{\Gamma \rightarrow (A \& B)^+} (GLE_6) \\
\frac{\Gamma \rightarrow A^-}{\Gamma \rightarrow (A \& B)^-} (GLE_8) \\
\Gamma, A^-, \Delta \rightarrow \theta \\
\frac{\Gamma, B^-, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (A \& B)^-, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{10}) \\
\frac{\Gamma \rightarrow B^+}{\Gamma \rightarrow (A \vee B)^+} (GLE_{12}) \\
\Gamma \rightarrow A^- \\
\frac{\Gamma \rightarrow B^-}{\Gamma \rightarrow (A \vee B)^-} (GLE_{14}) \\
\frac{\Gamma \rightarrow A^-}{\Gamma \rightarrow (\neg A)^+} (GLE_{16}) \\
\frac{\Gamma \rightarrow A^+}{\Gamma \rightarrow (\neg A)^-} (GLE_{18}) \\
\frac{\Gamma \rightarrow ([A]_y^x)^+}{\Gamma \rightarrow (\forall x A)^+} (GLE_{20})
\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_T^x)^+, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (\forall xA)^+, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{21})$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_T^x)^-, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (\forall xA)^-, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{23})$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_T^x)^+, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (\exists xA)^+, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{25})$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_T^x)^-, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, (\exists xA)^-, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{27})$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \rightarrow A^-}{\Gamma, A^+, \Delta \rightarrow} (GLE_{29})$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A^\varepsilon} (GLE_{31})$$

$$\frac{\Gamma, A^\varepsilon, A^\varepsilon, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, A^\varepsilon, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{33})$$

$$\frac{\Gamma, (A \supset \neg A)^+ \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A^+} (GLE_{35})$$

$$\Gamma, A^\varepsilon, \Delta \rightarrow A^\varepsilon (GLE_{37})$$

$$E^- \rightarrow (GLE_{39})$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow ([A]_T^x)^-}{\Gamma \rightarrow (\forall xA)^-} (GLE_{22})$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow ([A]_T^x)^+}{\Gamma \rightarrow (\exists xA)^+} (GLE_{24})$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow ([A]_T^x)^-}{\Gamma \rightarrow (\exists xA)^-} (GLE_{26})$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \rightarrow A^+}{\Gamma, A^-, \Delta \rightarrow} (GLE_{28})$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, A^\varepsilon, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{30})$$

$$\frac{\Gamma, B^\delta, A^\varepsilon, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, A^\varepsilon, B^\delta, \Delta \rightarrow \theta} (GLE_{32})$$

$$\Gamma \rightarrow A^\varepsilon$$

$$\frac{\Gamma, A^\varepsilon \rightarrow \theta}{\Gamma \rightarrow \theta} (GLE_{34})$$

$$\frac{\Gamma, (\neg A \supset A)^+ \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A^-} (GLE_{36})$$

$$E^+ \rightarrow (GLE_{38})$$

Теорема 1. Исчисление *HLE* формульно равнообъемно исчислению *GLE*.

Для доказательства теоремы введем понятие моделируемости сверхсеквенции следующим образом. Будем говорить, что сверхсеквенция $A_1^{\varepsilon_1}, A_2^{\varepsilon_2}, \dots, A_n^{\varepsilon_n} \rightarrow \theta$ моделируема в исчислении *HLE*, если имеет место

$$\text{выводимость} \quad \varepsilon_1 A_1, \varepsilon_2 A_2, \dots, \varepsilon_n A_n \vdash B, \quad \text{где} \quad \varepsilon_i A_i = \begin{cases} A_i, & \text{если } \varepsilon_i = + \\ \neg A_i, & \text{если } \varepsilon_i = - \end{cases}$$

$$(i = 1, \dots, n), \text{ а } B = \begin{cases} F, & \text{если } \theta = F^\varepsilon \text{ и } \varepsilon = + \\ \neg F, & \text{если } \theta = F^\varepsilon \text{ и } \varepsilon = - \\ \text{ложь, если } \theta - \text{пустой сверхкортеж.} \end{cases}$$

Лемма 1. Сверхсеквенция моделируема в *HLE* в том и только в том случае, когда она выводима в *GLE*.

Доказательство вышеуказанной леммы проводится подобно доказательству аналогичной леммы в [1] (с. 101–112).

Доказательство теоремы 1. Пусть формула A выводима в *HLE*. Тогда сверхсеквенция $\rightarrow A^+$ моделируема в *HLE*. Следовательно, она выводима в *GLE*. И поэтому формула A выводима в *GLE*.

Обратно, пусть формула A выводима в *GLE*. Тогда сверхсеквенция

$\rightarrow A^+$ выводима в GLE , но тогда она моделируема в HLE и, следовательно, формула A выводима в HLE . Что и требовалось доказать.

В дальнейшем будем использовать понятия сильного (слабого) обращения F , обозначаемого ωF (ψF), расширения (сужения) $F - \uparrow F$ ($\downarrow F$) и опорного образа $F - \hat{F}$, введенные в [1].

Опорным образом сверхкортежа $F_1, F_2, \dots, F_n$ будем называть сверхсеквенцию $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \dots, \hat{F}_n \rightarrow$. Кортёжным образом сверхсеквенции $F_1, F_2, \dots, F_n \rightarrow G$ (соответственно $F_1, F_2, \dots, F_n \rightarrow$) будем называть сверхкортеж $F_1, F_2, \dots, F_n, \psi G$ ($F_1, F_2, \dots, F_n$).

Введем наконец сверхкортежное исчисление GLE^* с правилами вывода $(GLE_1^*) - (GLE_{32}^*)$ и схемами аксиом (GLE_{33}^*) и (GLE_{34}^*) . В нижеследующих аксиомах Γ , Δ , Σ обозначают произвольные сверхкортежи, A и B - произвольные формулы, а F и G - произвольные сверхформулы, x , y , b - произвольные предметные переменные. Во всех правилах вывода, где встречаются $[A]_b^x$ и $[A]_y^x$, подстановки, указанные в формулировке правила, допустимы. Если в сверхкортеже над чертой встречается обозначение $[A]_b^x$, то переменная b не должна входить свободно ни в одну из сверхформул сверхкортежа, находящегося под чертой. В правиле (GLE_{30}^*) выражение вида $\Omega_{G,H}$ означает сверхкортеж, получающийся из сверхкортежа Ω удалением из него всех сверхформул, совпадающих с G или с H ; при всяком применении этого правила хотя бы одна из сверхформул F или $\uparrow F$ должна входить в Γ и хотя бы одна из сверхформул ψF или $\uparrow \psi F$ - в Δ .

Γ, A^*, Δ	Γ, A^-, Δ
$\frac{\Gamma, B^+, \Delta}{\Gamma, (A \supset B)^+, \Delta} (GLE_1^*)$	$\frac{\Gamma, B^x, \Delta}{\Gamma, (A \supset B)^+, \Delta} (GLE_2^*)$
$\frac{\Gamma, A^+, B^-, \Delta}{\Gamma, (A \supset B)^-, \Delta} (GLE_3^*)$	$\frac{\Gamma, A^+, B^*, \Delta}{\Gamma, (A \supset B)^*, \Delta} (GLE_4^*)$
$\frac{\Gamma, B^x, \Delta}{\Gamma, (A \supset B)^x, \Delta} (GLE_5^*)$	$\frac{\Gamma, A^+, B^+, \Delta}{\Gamma, (A \& B)^+, \Delta} (GLE_6^*)$
$\frac{\Gamma, B^-, \Delta}{\Gamma, (A \& B)^-, \Delta} (GLE_7^*)$	$\frac{\Gamma, B^*, \Delta}{\Gamma, (A \& B)^*, \Delta} (GLE_8^*)$
$\frac{\Gamma, A^x, B^x, \Delta}{\Gamma, (A \& B)^x, \Delta} (GLE_9^*)$	$\frac{\Gamma, B^+, \Delta}{\Gamma, (A \vee B)^+, \Delta} (GLE_{10}^*)$

$$\frac{\Gamma, A^-, B^-, \Delta}{\Gamma, (A \vee B)^-, \Delta} (GLE_{11}^*)$$

$$\Gamma, A^x, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, B^x, \Delta}{\Gamma, (A \vee B)^x, \Delta} (GLE_{13}^*)$$

$$\frac{\Gamma, A^+, \Delta}{\Gamma, (\neg A)^-, \Delta} (GLE_{15}^*)$$

$$\frac{\Gamma, A^*, \Delta}{\Gamma, (\neg A)^x, \Delta} (GLE_{17}^*)$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_b^x)^-, \Delta}{\Gamma, (\forall x A)^-, \Delta} (GLE_{19}^*)$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_y^x)^x, \Delta}{\Gamma, (\forall x A)^x, \Delta} (GLE_{21}^*)$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_y^x)^-, \Delta}{\Gamma, (\exists x A)^-, \Delta} (GLE_{23}^*)$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_b^x)^x, \Delta}{\Gamma, (\exists x A)^x, \Delta} (GLE_{25}^*)$$

$$\frac{\Gamma, \Delta}{\Gamma, F, \Delta} (GLE_{27}^*)$$

$$\frac{\Gamma, F, G, \Delta}{\Gamma, G, F, \Delta} (GLE_{29}^*)$$

$$\Gamma, F, \Delta, \omega F, \Sigma (GLE_{31}^*)$$

$$E^+ (GLE_{33}^*)$$

$$\frac{\Gamma, A^*, B^*, \Delta}{\Gamma, (A \vee B)^*, \Delta} (GLE_{12}^*)$$

$$\frac{\Gamma, A^-, \Delta}{\Gamma, (\neg A)^+, \Delta} (GLE_{14}^*)$$

$$\frac{\Gamma, A^x, \Delta}{\Gamma, (\neg A)^*, \Delta} (GLE_{16}^*)$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_y^x)^+, \Delta}{\Gamma, (\forall x A)^+, \Delta} (GLE_{18}^*)$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_b^x)^*, \Delta}{\Gamma, (\forall x A)^*, \Delta} (GLE_{20}^*)$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_b^x)^+, \Delta}{\Gamma, (\exists x A)^+, \Delta} (GLE_{22}^*)$$

$$\frac{\Gamma, ([A]_y^x)^*, \Delta}{\Gamma, (\exists x A)^*, \Delta} (GLE_{24}^*)$$

$$\frac{\Gamma, \uparrow F, \Delta}{\Gamma, F, \Delta} (GLE_{26}^*)$$

$$\frac{\Gamma, F, F, \Delta}{\Gamma, F, \Delta} (GLE_{28}^*)$$

$$\frac{\Gamma}{\Gamma, \uparrow F, \Delta_{\psi F, \uparrow \psi F}} (GLE_{30}^*)$$

$$\Gamma, F, \Delta, \psi F, \Sigma (GLE_{32}^*)$$

$$E^- (GLE_{34}^*)$$

В дальнейшем правило (GLE_{30}^*) будем называть правилом смешения.

Теорема 2. Для того чтобы сверхкортеж был выводим в GLE^* , необходимо и достаточно, чтобы его опорный образ был выводим в GLE ; для того чтобы сверхсеквенция была выводима в GLE , необходимо и достаточно, чтобы ее кортежный образ был выводим в GLE^* .

Доказательство теоремы 2. В силу того что аксиомы исчислений GLE и GLE^* совпадают соответственно с аксиомами исчислений GL и GL^* , введенными в [1], за исключением случаев, в которых участвует символ неопределенности E , доказательство будет проводиться так же, как в теореме 15.4 ([1], с. 220), за исключением вышеуказанных случаев. Приведем доказательство этой части теоремы.

Установим, что опорный образ всякого сверхкортежа, получаемого по схеме аксиом (GLE_{33}^*) или (GLE_{34}^*) , выводим в GLE . Достаточно заметить, что опорный образ $E^+ (E^-)$ есть $E^+ \rightarrow (E^- \rightarrow)$, а он, очевидно, выво-

дим в исчислении GLE .

Укажем также, что в GLE^* выводимы кортежные образы всех сверхсеквенций, получаемых при помощи схем аксиом (GLE_{38}) и (GLE_{39}), так как кортежными образами этих сверхсеквенций являются соответственно сверхкортежи E^+ и E^- . ►

Следствие. Исчисления HLE и GLE^* формульно равнообъемны.

В заключение сформулируем теорему об устранении смешений для исчисления GLE^* .

Теорема 3. Исчисление GLE^* конгруэнтно сверхкортежно равнообъемно исчислению, получающемуся из него посредством удаления правила смешения.

Доказательство проводится так же, как это сделано в аналогичной теореме в [1]. Укажем лишь, что в доказательстве случая 1.1 указанной теоремы аксиомы могут получаться также по схемам (GLE_{33}^*) и (GLE_{34}^*), а в этих случаях теорема, очевидно, верна.

Автор выражает большую признательность И. Д. Заславскому за постановку задачи, за помощь и внимание в процессе выполнения работы.

Кафедра алгебро-логических методов информатики

Поступила 17.12.2001

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский И.Д. Симметрическая конструктивная логика, Ер.: Изд-во АН Арм. ССР, 1978.
2. Zaslavsky I.D. On Logically but not Functionally Complete Calculus in Three-Valued Logic, Tbilisi Symposium on Logic, Language and Computation, Selected Papers, CSLI Publications, Stanford, California, 309–313 (1998).
3. Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

Հ.Ռ. ԲՈԼԻԲԵԿՅԱՆ

ԵՌԱՐԺԵՐ ՊՐԵԴԻԿԱՏԱՅԻՆ ՀԱՇԻՎՆԵՐ ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅԱՆ ՆՇԱՆՈՎ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում են սիմետրիկ կոնստրուկտիվ տրամաբանության անորոշության նշանով պրեդիկատների եռարժեք հաշիվների համարժեքության հարցերը: Դիտարկվող հաշիվներից մեկի համար ապացուցված է խառնակումների հեռացման թեորեմը:

H.R. BOLIBEKIAN

THREE-VALUED PREDICATE CALCULI WITH THE SYMBOL OF UNCERTAINTY

Summary

The question of equivalence of three-valued predicate calculi with the symbol of uncertainty of symmetric constructive logic is considered. For one of the considered calculi the mix elimination theorem is proved.