

Математика

УДК 517.5

А.Г.БАГДАСАРЯН

О НУЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА

В работе рассматриваются обобщенные пространства типа Никольского-Бесова с нулевым верхним индексом, порожденные некоторыми функциями полиномиального роста. В отличие от соответствующих H -пространств типа Соболева-Ливуилля, которые не зависят от порождающей функции при нулевом верхнем индексе, рассматриваемые в статье B -пространства, вообще говоря, указанным свойством не обладают. В статье, помимо этого факта, доказываются некоторые теоремы вложения разных метрик.

Обозначим через G^+ множество положительных функций $\mu(\xi)$, непрерывных в R_n , бесконечно дифференцируемых вне координатных осей, и таких, что $|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c \mu(\xi)$ с некоторой положительной константой c и мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i = 0, 1, i = 1, \dots, n$.

Определение 1. Пусть $\mu \in G$, $1 < p < \infty, -\infty < s < \infty$. Положим

$$H_p^s(\mu, R_n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S'; \|f\|_H = \|F^{-1} \mu^s Ff\|_{L_p(R_n)} < \infty \right\},$$

где F – оператор преобразования Фурье, S – класс Шварца.

Пространства типа Никольского-Бесова определяем с помощью метода вещественной интерполяции (см. [1, 2]).

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty, -\infty < s < \infty, 1 \leq q \leq \infty, \mu \in G^+$.

Положим

$$a) B_{p,q}^0(\mu; R_n) \equiv B_{p,q}^0(\mu) = (H_p^1(\mu; R_n), H_p^{-1}(\mu; R_n))_{1/2,q},$$

$$b) B_{p,q}^s(\mu; R_n) \equiv B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'; F^{-1}(\mu^s Ff) \in B_{p,q}^0 \right\}.$$

Норма в нулевых пространствах эквивалентна величине (см. [3])

$$\|f\|_{B_{p,q}^0} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \quad (1)$$

(с соответствующими видоизменениями при $q = \infty$).

Ясно, что $H_p^0(\mu; R_n) = L_p(R_n)$ для любой функции $\mu \in G^+$. Кроме того, $B_{p,q}^0(\mu) = B_{p,q}^0(\mu^a)$ для любого вещественного числа $a \neq 0$ (см. [3]). Такая же особенность просматривается и для классических анизотропных пространств Никольского–Бесова (см. [4]). Следующая теорема показывает, что в общей ситуации нулевых B -пространств типа Никольского–Бесова для функций $\mu \in G^+$ эта особенность, вообще говоря, нарушается.

Теорема 1. Пусть $\mu, \nu \in G^+$ такие, что $\mu + \nu \sim (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ для некоторого $s > 0$ (знак $\sim$ означает двустороннюю оценку). Пусть, далее, индексы p, q не равны одновременно двойке. Тогда равенства

$$B_{p,q}^0\left(\frac{\mu}{\mu + \nu}\right) = B_{p,q}^0(\mu^2 + \mu\nu), \quad B_{p,q}^0\left(\frac{\nu}{\mu + \nu}\right) = B_{p,q}^0(\nu^2 + \mu\nu) \quad (2)$$

не могут выполняться одновременно.

Доказательство. Для функции $\lambda \in G^+$ рассмотрим оператор типа Лиувилевского дифференцирования: $I_\lambda = F^{-1}(\lambda F)$. Тогда на основании определения 2, предполагая, что имеют место равенства в (2), получаем

$$\begin{aligned} (H_p^1(\mu), H_p^1(\mu + \nu))_{1/2,q} &= I_{\mu + \nu} \left(H_p^1\left(\frac{\mu}{\mu + \nu}\right), L_p \right)_{1/2,q} = I_{\mu + \nu} B_{p,q}^{1/2} \left(\frac{\mu}{\mu + \nu} \right) = \\ &= I_{(\mu(\mu + \nu))^{1/2}} B_{p,q}^0 \left(\frac{\mu}{\mu + \nu} \right) = I_{(\mu(\mu + \nu))^{1/2}} B_{p,q}^0(\mu^2 + \mu\nu) = B_{p,q}^{1/2}(\mu^2 + \mu\nu). \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично имеем

$$(H_p^1(\mu), H_p^1(\mu + \nu))_{1/2,q} = B_{p,q}^{1/2}(\nu^2 + \mu\nu). \quad (4)$$

Тогда из (3), (4) и теоремы 6 [5], теоремы 5 [6] получаем

$$\begin{aligned} H_p^1(\mu + \nu) &= (H_p^1(\mu + \nu), H_p^1(\mu + \nu))_{1/2,q} = (H_p^1(\mu) \cap H_p^1(\nu), H_p^1(\mu + \nu))_{1/2,q} = \\ &= (H_p^1(\mu), H_p^1(\mu + \nu))_{1/2,q} \cap (H_p^1(\nu), H_p^1(\mu + \nu))_{1/2,q} = \\ &= B_{p,q}^{1/2}(\mu^2 + \mu\nu) \cap B_{p,q}^{1/2}(\nu^2 + \mu\nu) = B_{p,q}^{1/2}(\mu^2 + \nu^2) = B_{p,q}^1(\mu + \nu). \end{aligned}$$

Таким образом

$$H_p^1(\mu + \nu) = B_{p,q}^1(\mu + \nu). \quad (5)$$

Теперь если $\mu + \nu \sim (1 + |\xi|^2)^{s/2}$, то левое и правое пространства в (5)

суть классические изотропные пространства Соболева–Лиувилля и Никольского–Бесова соответственно. Тогда равенство (5) принимает вид

$$H_p^s(R_n) = B_{p,q}^s(R_n). \quad (6)$$

Общеизвестно (см., напр., теорему 2.3.9 из [7]), что для классических H - и B -пространств равенство (6) верно тогда и только тогда, когда $p = q = 2$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. ■

Таким образом, нулевые B -пространства могут не совпадать. Тем не менее между ними существует тесная связь. Следующие две теоремы показы-

вают степень близости нулевых B -пространств в зависимости от нижних и верхних индексов.

Теорема 2. Пусть $\mu, \nu \in G^+, 1 < p < \infty$. Тогда

$$B_{p,1}^0(\mu; R_n) \subset L_p \subset B_{p,\infty}^0(\nu; R_n). \quad (7)$$

Доказательство. Убедимся в справедливости правого вложения. Имеем (см. определение 3)

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^0(\nu)} = \|f\|_{(H_p^1(\nu), H_p^{-1}(\nu))_{1/2,\infty}} \sim \sup \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \nu}{\nu^2 + t} Ff \right\|_{L_p} \leq c \|f\|_{L_p}.$$

Использовано включение $\frac{t^{1/2} \nu}{\nu^2 + t} \in M_p^p$ (пространство мультипли-

каторов Фурье) с нормой, не зависящей от t . Для доказательства левого вложения в (7) воспользуемся J -методом вещественной интерполяции (см. [1, 2]). Пусть $f \in B_{p,1}^0(\mu) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{1/2,1}$, тогда f представляется в

виде $f = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &\leq \int_0^\infty t^{-1/2} \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} \frac{\mu^2 + t}{\mu} F u(t) \right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \leq c \int_0^\infty t^{-1/2} \left\| F^{-1} \frac{\mu^2 + t}{\mu} F u(t) \right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq c \int_0^\infty t^{-1/2} \left(\|u(t)\|_{H_p^1(\mu)} + t \|u(t)\|_{H_p^{-1}(\mu)} \right) \frac{dt}{t} \sim \int_0^\infty t^{-1/2} J(t, u(t); H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu)) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Беря нижнюю грань по всем представлениям $f = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$, приходим к левому вложению в (7). ■

Теорема 3. Пусть $\mu, \nu \in G^+, 1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty, \varepsilon > 0$. Если для некоторой константы $c > 0$ $\mu(\xi), \nu(\xi) \geq c, \xi \in R_n$, то имеют место вложения

$$B_{p,q}^\varepsilon(\mu) \subset L_p \subset B_p^{-\varepsilon}(\nu). \quad (8)$$

Доказательство. Докажем правое вложение. Поскольку

$$\mu^{2\varepsilon} + t \leq c(\mu^{2\varepsilon} + t\mu^{2\varepsilon}), \text{ т.е. } \frac{1}{1+t} \leq c \frac{\mu^{2\varepsilon}}{\mu^{2\varepsilon} + t},$$

то из (1), теоремы о мультипликаторах Фурье [8] и теоремы 1 [3] имеем для $f \in B_{p,q}^\varepsilon(\mu)$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p}^q &\sim \|f\|_{B_{p,q}^0(1)}^q \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}}{1+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu^{2\varepsilon}}{\mu^{2\varepsilon} + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} = \\ &= c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu^\varepsilon}{\mu^{2\varepsilon} + t} F(I_{\mu^\varepsilon} f) \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \sim \|I_{\mu^\varepsilon} f\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q \sim \|I_{\mu^\varepsilon} f\|_{B_{p,q}^\varepsilon(\mu)}^q = \|f\|_{B_{p,q}^\varepsilon(\mu)}^q, \end{aligned}$$

т. е. $B_{p,q}^\varepsilon(\mu) \subset L_p$.

Левое вложение в (8) доказано. Правое вложение доказывается аналогично. ■

Кафедра прикладного анализа

Поступила 28.01.2002

ЛИТЕРАТУРА

1. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
2. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
3. Багдасарян А.Г. – Изв. АН РА, 2001, т. 36, № 5.
4. Лизоркин П.И. – Сибир. мат. ж., 1968, № 9, с. 1127–1152.
5. Багдасарян А.Г. – Мат. сб., 1998, т. 189, № 2, с. 73–80.
6. Багдасарян А.Г. – Analysis Math., 1998, т. 24, с. 3–14.
7. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
8. Лизоркин П.И. – ДАН СССР, 1963, т. 152, с. 808–811.

Ա.Գ. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ

ՆԻԿՈԼՍԿՈՒ-ԲԵՍՈՎԻ ՏԻՊԻ ԶՐՈՅԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են Նիկոլսկու-Բեսովի տիպի ընդհանրացված տարածություններ զրոյական վերին ինդեքսով, որոնք ծնված են բազմանդամային ան ունեցող որոշ ֆունկցիաներով: Ի տարբերություն զրոյական վերին ինդեքսով Սոբոլևի-Լիուվիլի տիպի համապատասխան H -տարածությունների, որոնք կախված չեն ծնող ֆունկցիայից, հոդվածում դիտարկվող B -տարածությունները, ընդհանրապես ասած, այդ հատկությամբ օժտված չեն: Հոդվածում ապացուցվում է այդ փաստը, ինչպես նաև տարբեր մետրիկաների ներդրման թեորեմներ:

A.G. BAGHDASARIAN

ON ZERO-SPACES OF NIKOLSKII-BESOV TYPE

Summary

In the paper are considered the generalized spaces of Nikolskii-Besov type with zero upper indexes born from some functions with polynomial growth. In contrast to the corresponding H -spaces of Sobolev-Liouville type, which in case of upper index do not depend the function born from, the considered spaces in general don't have this property. The paper gives the proof of this fact and some embedding theorems are proved.