

Математика

УДК 517.95

Л. Г. ТОНОЯН

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

В статье доказано существование оптимальной пары начально-краевой задачи для некоторого класса нелинейных эволюционных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами.

1⁰. Пусть $\Omega \subset R^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ с боковой границей $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного эволюционного уравнения четвертого порядка вида:

$$u_t + \Delta^2 u - \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} - u^3 = \nu, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad (2)$$

$$u|_{\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0, \quad (3)$$

где ν – направление внешней нормали к границе Γ . Задача (1)–(3) в случае отсутствия младших членов в уравнении (1) и в более узком классе функций исследована в [1]. Предполагается выполнение следующих условий. Матрица $\|a_{ij}(x)\|_{i,j=1}^3$ симметрическая, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, и неотрицательна квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in R^3. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что функция $\nu(x, t)$ – управление, которое задано, а решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) есть состояние системы [1].

Рассматриваемая задача нелинейна и, как известно, не имеет глобальных решений по времени при $\nu \in L^2(Q)$ в построенных естественным образом функциональных пространствах.

Введем в рассмотрение множество пар $\{v, u\}$, где $v \in U_{ad}$, $u \in L^{\alpha}(Q)$, а U_{ad} – некоторое непустое выпуклое замкнутое множество пространства

$L^2(Q)$. Пара $\{v, u\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и начально-краевым условиям (2), (3), называется парой управление—состояние.

Выбор функциональных пространств обусловлен постановкой задачи. Ниже будут уточнены пределы изменения параметра α .

Естественно предположить, что существует пара $\{v_0, u_0\}$ такая, что

$$\{v_0, u_0\} \in V_{ad} \times L^\alpha(Q).$$

Как хорошо известно (см., напр., [2]), один из подходов исследования проблемы разрешимости задачи (1)–(3) заключается в сведении ее к соответствующей экстремальной задаче.

Рассмотрим функционал

$$J(v, u) = \frac{1}{\alpha} \|u - u_d\|_{L^\alpha(Q)}^\alpha + \frac{N}{2} \|v\|_{L^2(Q)}^2, \quad (5)$$

где $u_d \in L^\alpha(Q)$ и постоянная $N > 0$ считаются заданными.

Задача заключается в нахождении минимума функционала (5) на множестве $V_{ad} \times L^\alpha(Q)$:

$$\inf_{\substack{v \in V_{ad} \\ u \in L^\alpha(Q)}} J(v, u), \quad (*)$$

где пара $\{v, u\}$ является решением задачи (1)–(3).

Пару $\{v_0, u_0\}$, сообщающую минимум функционалу (5), назовем оптимальной парой.

2°. Введем функциональные пространства, в которых исследуется поставленная в 1° задача. Пусть Ω – ограниченная область пространства R^n с достаточно гладкой границей Γ . Для натурального m и любого $1 < \lambda < \infty$ введем банахово пространство

$$W^{m, \lambda}(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^\lambda(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\} \quad (6)$$

функций $u(x)$ с нормой

$$\|u\|_{W^{m, \lambda}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\lambda(\Omega)}^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (7)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Обозначим, далее, через

$$W^{m, 1; \lambda}(Q) = \{u \mid D_x^\alpha u \in L^\lambda(Q), |\alpha| \leq m; u_t \in L^\lambda(Q)\} \quad (8)$$

банахово пространство функций $u(x, t)$ с нормой

$$\|u\|_{W^{m, 1; \lambda}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \iint_Q \left[|D_x^\alpha u|^\lambda + |u_t|^\lambda \right] dx dt \right)^{1/\lambda} \quad (9)$$

Это пространство (см. [2, 3]) совпадает с пространством функций $u(x, t)$,

$$u \in L^\lambda(0, T; W^{m, 1}(\Omega)), \quad u_t \in L^\lambda(0, T; L^\lambda(\Omega)). \quad (10)$$

3°. В связи с изучением задачи (1)–(3) приведем одну теорему вложения для пространств $W^{4,1;\lambda}(Q)$.

Теорема А (см. [1, 3]). Пространство $W^{4,1;\lambda}(Q)$ непрерывным образом вкладывается в $L^\mu(Q)$, где

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda} - \frac{4}{n+4}, \quad \mu > 0, \quad (11)$$

при этом вложение

$$W^{4,1;\lambda}(Q) \rightarrow L^{\mu-\varepsilon}(Q) \quad (12)$$

компактно при любом $\varepsilon > 0$, а n – размерность области Ω .

Ниже мы будем существенно опираться на одну теорему существования и единственности для линейных уравнений четвертого порядка.

Рассмотрим линейное уравнение вида

$$u_t + \Delta^2 u - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = f(x, t) \quad (13)$$

с начально-краевыми условиями (2), (3).

Справедлива

Теорема В (см. [1], стр.45). Пусть матрица $\|a_{ij}(x)\|$ удовлетворяет условиям 1°, а $f \in L^1(Q)$, $1 < \lambda < \infty$.

Пусть, далее, функция $u_0(x)$ принадлежит пространству

$W^{0,2,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in W^{2,\lambda}(\Omega), u|_r = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_r = 0 \right\}$. Тогда задача (13) с условиями (2), (3) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W^{4,1;\lambda}(Q)$.

4°. Здесь приводится основной результат статьи. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $3 < \alpha < 21/4$ и будут выполнены условия 1°. Тогда существует оптимальная пара $\{v, u\}$ – решение задачи (*).

Доказательство. Предположим, что множество пар $\{v, u\}$ непусто, тогда $\inf J(v, u) \leq J(v_0, u_0)$, где $\{v_0, u_0\} \in L^2(Q) \times L^\alpha(Q)$. Пусть далее $\{v_n, u_n\}$ – минимизирующая последовательность для функционала J . Тогда очевидно

$$J(v_n, u_n) \leq c, \quad (14)$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Имеем из (5) и (14)

$$\|v_n\|_{L^2(Q)} \leq c, \quad \|u_n\|_{L^\alpha(Q)} \leq c. \quad (15)$$

Пары $\{v_n, u_n\}$ удовлетворяют уравнению (1):

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \Delta^2 u_n - \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)_{x_j} = u_n^3 + v_n. \quad (16)$$

Из (15) следует, что последовательность функций $u_n^3 + v_n$ ограничена в $L^{\alpha/3}(Q)$, $3 < \alpha < 6$. В силу теоремы В уравнение (16) с условиями (2),(3) имеет единственное решение $u_n \in W^{4,1;\alpha/3}$, $n = 1, 2, \dots$. Имеем, стало быть, из (16) с учетом (15), что

$$\|u_n\|_{W^{4,1;\alpha/3}(Q)} \leq c \quad (17)$$

(здесь и далее через $c > 0$ будем обозначать, вообще говоря, различные константы).

Из теоремы А следует, что при $n = 3$ и $3 < \alpha < 21/4$ пространство

$$W^{4,1;\alpha/3}(Q) \rightarrow L^{\mu-\varepsilon}(Q), \quad (18)$$

где $\mu = \frac{7\alpha}{21-4\alpha}$ (при этом заметим, что $\mu > 7/3$), а $\varepsilon > 0$ – произвольное достаточно малое число.

В частности имеет место компактное вложение $W^{4,1;\alpha/3}(Q) \rightarrow L^2(Q)$.

Следовательно, в силу (17) из последовательности $\{u_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, снова обозначаемую через $\{u_n\}$, сходящуюся в $L^{\mu-\varepsilon}(Q)$ и, значит, в $L^2(Q)$, т. к. $\mu > 7/3$. Переходя снова к подпоследовательности, получим, что $u_n \rightarrow u$ почти всюду.

Имеем далее, что $\{u_n^3\}$ ограничена в $L^{\alpha/3}(Q)$ и почти всюду сходится к u^3 , откуда следует, что

$$u_n^3 \rightharpoonup u^3 \text{ в } L^{\alpha/3}(Q) \text{ слабо.} \quad (19)$$

Теперь мы можем совершить предельный переход в (16). Имеем для любого $\varphi \in L^{\alpha/(\alpha-3)}(Q)$

$$\iint_Q \left[\frac{\partial u_n}{\partial t} + \Delta^2 u_n - \sum_{i,j=1}^1 \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)_{x_j} \right] \varphi dx dt = \iint_Q (u_n^3 + v_n) \varphi dx dt. \quad (20)$$

Из (15) следует, переходя к подпоследовательности, имеем, что $v_n \rightarrow v$ в $L^2(Q)$ слабо, а в силу (19) подпоследовательность $\{u_n^3 + v_n\}$ в $L^{\alpha/3}(Q)$ сходится слабо.

В пределе из (20) имеем, что $u_n \rightarrow u$ в $W^{4,1;\alpha/3}(Q)$ слабо, и

$$u_t + \Delta^2 u - \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x) u_{x_i} \right)_{x_j} - u^3 = v.$$

Таким образом, пара $\{v, u\}$ есть оптимальная пара. Теорема доказана.

В заключение приношу благодарность проф. Р. Л. Шахбагяну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж. Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
2. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
3. Lions J. L. Perturbations singulieres dans les problemes aux limites et en controle optimal. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.

L. Գ. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՄԻ ԷԶՏՏՐԵՄԱԼ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ապացուցված է փոփոխական գործակիցներով չորրորդ կարգի ոչ գծային էվոլյուցիոն հավասարումների որոշ դասի համար եզրային խնդրի օպտիմալ զույգի գոյությունը:

L.G. TONoyAN

ON THE SOME EXTREMAL PROBLEM

Summary

In the paper the existence of an optimal pair of an initial boundary problem for some class of the nonlinear evolutionary equations of the fourth order with variable coefficients is proved.