

УДК 512.57

Л.М. БУДАГЯН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КВАЗИБУЛЕВЫХ АЛГЕБР

В данной статье приводится доказательство элементарной классификации алгебр со сверхтождествами булевых алгебр.

Элементарная характеристика булевых алгебр впервые полностью была доказана в работе Ершова [1]. Заметим, что Тарский анонсировал этот результат в работе [2] без доказательства.

Алгебры U_1 и U_2 сигнатуры σ называются *элементарно эквивалентными* (символически $U_1 \equiv U_2$), если каждая замкнутая формула 1-й степени сигнатуры σ , истинная в одной из заданных алгебр, истинна в другой.

Через $|U|$ обозначим основное множество алгебры U . Пусть φ и ψ – произвольные частичные изоморфизмы из U_1 в U_2 , где U_1 и U_2 – алгебры сигнатуры σ . Обозначим через $\delta\varphi$ область определения, а через $\rho\varphi$ – область значения отображения φ . Если $\delta\varphi \subseteq \delta\psi$ и для любого $a \in \delta\varphi$ $\varphi a = \psi a$, тогда будем писать $\varphi \subseteq \psi$.

Теорема 1 [3]. Две алгебры U_1 и U_2 сигнатуры σ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n \supseteq S_{n+1} \supseteq \dots$ непустых множеств (конечных) частичных изоморфизмов из U_1 в U_2 , что для любого $n \in \omega$, любого $\varphi \in S_{n+1}$ и любых $a \in |U_1|$ и $b \in |U_2|$ существуют $\psi_1, \psi_2 \in S_n$ такие, что $\varphi \subseteq \psi_1, \psi_2$, и $a \in \delta\psi_1$, $b \in \rho\psi_2$.

Каждой булевой алгебре U ставится в соответствие характеристика $ch(U)$, которая полностью определяет элементарную теорию [4].

Напомним, что ненулевой элемент a называется *атомом*, если под ним лежит только нулевой элемент, т. е. $(\forall b)(b < a \rightarrow b = 0)$. Булева алгебра U называется *атомной*, если под любым ненулевым элементом из U

есть атом, и *безатомной*, если в ней нет атомов. Элемент a называется *атомным*, если под любым ненулевым $x \leq a$ есть атом, и *безатомным*, если под ним нет атомов.

Для булевой алгебры U определим идеал $I(U)$, который будем называть *идеалом Ершова–Тарского*. Положим $I(U) = \{x \in U \mid \text{существуют атомный элемент } a \text{ и безатомный элемент } b \text{ такие, что } x = a + b\}$. Полагаем $I_0(U) = \{0\}$, ${}^0U = U$, ${}^0p = id_u$; $I_1(U) = I(U)$, ${}^1U = U / I_1(U)$, 1p – естественная проекция U на 1U ; пусть для $n \in \omega$ идеал $I_n(U)$ алгебры U уже определен, тогда ${}^nU = U / I_n(U)$, ${}^np : U \rightarrow {}^nU$ – естественная проекция и тогда $I_{n+1}(U) = {}^np^{-1}(I({}^nU))$. Таким образом определяется последовательность $I_n(U)$, $n \in \omega$, идеалов Ершова–Тарского булевой алгебры U .

Теперь определим *элементарную характеристику* булевой алгебры U как тройку $ch(U) = (ch_1(U), ch_2(U), ch_3(U))$. Наименьшее n , для которого $I_{n+1}(U) = U$, называется *первой (элементарной) характеристикой* булевой алгебры U и обозначается $ch_1(U)$. Если таких n нет, полагаем $ch_1(U) = \infty$. При $ch_1(U) = \infty$ считаем, что *вторая* $ch_2(U)$, и *третья* $ch_3(U)$ (*элементарные*) *характеристики* булевой алгебры U равны нулю. В противном случае (т. е. когда $ch_1(U) = n$) вторая характеристика $ch_2(U)$ равна числу атомов булевой алгебры nU , если это число конечно, и $ch_2(U) = \infty$, если в nU бесконечно много атомов. Третья характеристика равна 1, если в nU есть ненулевой безатомный элемент, и равна 0 в противном случае.

Теорема 2 [3]. Булевы алгебры U_1 и U_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $ch(U_1) = ch(U_2)$.

Сверхтождества – это абсолютно замкнутые формулы 2-й ступени [5, 6]:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (w_1 = w_2), \quad (I)$$

где w_1, w_2 – термы (слова) от функциональных переменных $X_1, \dots, X_m$ и от предметных переменных $x_1, \dots, x_n$.

Примером, показывающим естественность формул вида (I) и их моделей (т. е. алгебр с такими формулами), являются многообразия многообразий алгебр (определяемые как абстрактные классы многообразий алгебр, замкнутых по подмногообразиям, по произведениям многообразий и по редуктам многообразий), они характеризуются сверхтождествами [7–9], тогда как многообразия алгебр – (обычными) тождествами.

В работах [10, 11] дана характеристика сверхтождеств в многообразии булевых алгебр.

Теорема 3 [11]. Любое сверхтождество многообразия булевых алгебр является следствием следующих сверхтождеств:

$$X(x, x) = x, \quad (1)$$

$$X(x, y) = X(y, x), \quad (2)$$

$$X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z), \quad (3)$$

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)), \quad (4)$$

$$F(F(x)) = x, \quad (5)$$

$$X(F(x), y) = X(F(X(x, y)), y), \quad (6)$$

$$F(X(F(X(x, y)), F(X(x, F(y))))) = x. \quad (7)$$

Определение. Алгебра A , удовлетворяющая сверхтождествам многообразия булевых алгебр, называется *квазибулевой алгеброй*.

Напомним конструкцию булевой суммы, сохраняющей сверхтождества булевых алгебр [12].

Пусть $U = \langle Q; \Omega \cup \{F\} \rangle$ – T -алгебра с одной унарной операцией F . Пусть $\langle Q_i; \Omega \rangle, i \in I$, – подсистемы (подалгебры) для алгебры U и пусть $U_i = \langle Q_i; \Omega \cup \{F_i\} \rangle$ – алгебра с одной унарной операцией F_i для любого $i \in I$. Алгебра $U = \langle Q; \Omega \cup \{F\} \rangle$ называется *булевой суммой* алгебр $U_i = \langle Q_i; \Omega \cup \{F_i\} \rangle, i \in I$, если

а) $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, где $i, j \in I, i \neq j$;

б) $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$;

в) на множестве индексов I можно определить частичный порядок “ $\leq$ ” так, что $I(\leq)$ – булева алгебра;

г) если $i \leq j$, то существует изоморфизм

$$(\varphi_{i,j}, \bar{\varepsilon}): U_i \Rightarrow U_j, i, j \in I,$$

где $\bar{\varepsilon}(F_i) = F_j$, $\bar{\varepsilon}(A) = A$ для любого $A \in \Omega$, причем $\varphi_{i,i} = \varepsilon$ и $\varphi_{i,j} \cdot \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$, где $i \leq j \leq k$;

д) для любого $i \in I$ существует изоморфизм

$$(h_{i,i}, \bar{\varepsilon}): U_i \Rightarrow U_i,$$

причем $h_{i,i}^{-1} = h_{i,i}$, $\varphi_{i,1} = h_{i,i} \cdot \varphi_{i,i}$, где 1 – единица булевой алгебры $I(\leq)$, а $\bar{i}$ – дополнение в этой решетке;

е) для любого $A \in \Omega$, $|A| = n$, $n \geq 2$, и для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(\varphi_{i_1, i_0}(x_1), \dots, \varphi_{i_n, i_0}(x_n))$, где $x_1 \in Q_{i_1}, \dots, x_n \in Q_{i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in I$, $i_0 = i_1 + \dots + i_n$;

ж) для унарной операции F и для любого $x \in Q$

$$F(x) = h_{i,i}[F_i(x)], \text{ где } x \in Q_i.$$

Теорема 4 [12]. Алгебра с двумя бинарными и одной унарной операциями удовлетворяет сверхтождествам многообразия булевых алгебр тогда и только тогда, когда U является булевой алгеброй или булевой суммой булевых алгебр.

Пусть в алгебре $U = Q(+, -, ')$ выполняются сверхтождества многообразия булевых алгебр. Структура булевой суммы для U определяется

следующим образом. На множестве Q определяется отношение θ по правилу $x\theta y \Leftrightarrow x + xy = x, y + yx = y$.

Все нижеисследующие утверждения, которые читатель может найти в [12], приводим без доказательств.

Утверждение 1. Отношение θ является отношением эквивалентности.

Пусть $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$ – разбиение, соответствующее θ .

Утверждение 2. Каждое подмножество Q_i замкнуто относительно сложения, умножения, а также относительно унарной операции $'$, определенной на множестве Q следующим образом:

$$x' = x \cdot \overline{x + x} + \overline{x} \cdot (x + \overline{x}).$$

Утверждение 3. Алгебры $U_i = Q_i(+, \cdot, ')$, $i \in I$, являются булевыми алгебрами.

Утверждение 4. Фактор-множество $Q/\theta = \{Q_i / i \in I\}$ является булевой алгеброй относительно следующих операций:

а) $Q_i + Q_j = Q_k \Leftrightarrow 1_i + 1_j \in Q_k$, где $i, j, k \in I$, при этом $1_i + 1_j = 1_k$;

б) $\overline{Q_i} = Q_j \Leftrightarrow \bar{1}_i \in Q_j$, где $i, j \in I$, при этом $\bar{1}_i = 0_j$;

в) $Q_i \cdot Q_j = \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_j}}$.

Причем имеют место включения $a + b \in Q_i + Q_j$, $a \cdot b \in Q_i + Q_j$ и $\bar{a} \in \overline{Q_i}$, где $a \in Q_i$, $b \in Q_j$.

Отождествляя каждое Q_i со своим индексом, получим булеву алгебру $I(\leq)$, где $i \leq j \Leftrightarrow Q_i \leq Q_j$.

Утверждение 4. Для любого $i \in I$ изоморфизм $h_{i,i}: Q_i \rightarrow Q_i$, определяющийся по правилу $h_{i,i}(x) = (\bar{x})'$, и для любых $i, j \in I, i \leq j$, изоморфизм $\varphi_{i,j}: Q_i \rightarrow Q_j$, определяющийся как

$$\varphi_{i,j}(x) = x \cdot 1_j \in Q_i + Q_j = Q_j,$$

где $x \in Q_i$, $1_j \in Q_j$, удовлетворяют условиям (г), (д), (е), (ж) из определения булевой суммы.

Таким образом, алгебра U представляется в виде булевой суммы булевых алгебр $U_i, i \in I$.

Теперь мы можем перейти к доказательству элементарной характеристики квазибулевых алгебр с двумя бинарными и одной унарной операциями.

Предложение 1. Если A и B – булевы суммы булевых алгебр $A_i, i \in I^1$, и $B_k, k \in I^2$, соответственно и они элементарно эквивалентны, то булевы алгебры I^1 и I^2 также элементарно эквивалентны.

Доказательство. Так как $A \equiv B$, то по теореме 1, существует такая последовательность $S_0 \supseteq S_1 \dots \supseteq S_n \supseteq \dots$ непустых множеств частичных

изоморфизмов из A в B , что для любых n , $\varphi \in S_{n+1}$, $a \in A$, $b \in B$ существуют $\varphi_0, \varphi_1 \in S_n$ такие, что $\varphi \supseteq \varphi_0, \varphi_1$, $a \in \delta\varphi_0$, $b \in \rho\varphi_1$.

Для каждого n и каждого $\varphi \in S_n$ определим частичное отображение ψ из I^1 в I^2 ; если $a \in \delta\varphi$, $a \in A_i$, $\varphi a \in B_k$, то $\psi i = k$. Покажем корректность определения отображения ψ . Пусть $a, b \in A_i$, $a, b \in \delta\varphi$ и $\varphi a \in B_k$. Так как φ — изоморфизм и $a, b \in A_i$, то из $a \theta_A b$ следует $\varphi a \theta_B \varphi b$, и так как $\varphi a \in B_k$, то $\varphi b \in B_k$. Таким образом, каждому i , для которого определено ψ , ставится в соответствие только одно k .

Покажем, что ψ — частичный изоморфизм из I^1 в I^2 . Пусть $a, b \in \delta\varphi$ и $a \in A_i$, $b \in A_j$. Имеем $\varphi(a+b) = \varphi a + \varphi b$. И так как $a+b \in A_i + A_j = A_{i+j}$, то $\varphi(a+b) \in B_{\varphi(i+j)}$. С другой стороны, $\varphi a + \varphi b \in B_{\varphi i} + B_{\varphi j}$ и, следовательно, $B_{\varphi(i+j)} = B_{\varphi i} + B_{\varphi j}$, т. е. $\psi(i+j) = \psi i + \psi j$.

Имеем $\overline{\varphi a} = \overline{\varphi a}$, $a \in A_i$, $\varphi a \in B_{\varphi i}$, $\overline{\varphi a} \in \overline{B_{\varphi i}} = B_{\overline{\varphi i}}$.

Отсюда $B_{\overline{\varphi i}} = B_{\varphi i}$, т. е. $\overline{\psi i} = \psi i$. К тому же $\psi(i \cdot j) = \psi(\overline{i+j}) = \overline{\psi(i+j)} = \overline{\psi i + \psi j} = \overline{\psi i} + \overline{\psi j} = \psi i + \psi j = \psi i \cdot \psi j$.

Таким образом, определилась последовательность $Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ непустых множеств частичных изоморфизмов из I^1 в I^2 .

Покажем, что для любых n , $\psi \in Z_{n+1}$ и любых $i \in I^1$, $j \in I^2$ существуют $\psi_1, \psi_2 \in Z_n$, что $i \in \delta\psi_1$, $j \in \rho\psi_2$ и $\psi \subseteq \psi_1, \psi_2$.

Изоморфизму ψ в последовательности $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n \supseteq \dots$ соответствует некоторое определенное $\varphi \in S_{n+1}$, причем для каждого $a \in A_i$, $b \in B_j$ существуют $\varphi_1, \varphi_2 \in S_n$, $\varphi \subseteq \varphi_0, \varphi_1$, $a \in \delta\varphi_1$, $b \in \rho\varphi_2$.

Данные φ_1 и φ_2 определяют частичные изоморфизмы ψ_1 и ψ_2 соответственно, где $\psi \subseteq \psi_1, \psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in Z_n$, причем так как $a \in A_i$ и $a \in \delta\varphi_1$, то $i \in \delta\psi_1$, и так как $b \in B_j$ и $b \in \rho\varphi_2$, то $j \in \rho\psi_2$. По теореме 1, $I^1 \equiv I^2$, и значит предложение доказано.

Предложение 2. Если A и B — булевы суммы булевых алгебр A_i , $i \in I^1$, и B_k , $k \in I^2$, соответственно и если они элементарно эквивалентны, то для любых $i \in I^1$ и $k \in I^2$ A_i и B_k также элементарно эквивалентны.

Доказательство. Так как $A \equiv B$, то, по теореме 1, существует такая последовательность $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n \supseteq \dots$ непустых множеств частичных изоморфизмов из A в B , что для любых n , $\varphi \in S_{n+1}$, $a \in A$, $b \in B$, существуют $\varphi_0, \varphi_1 \in S_n$ такие, что $\varphi \subseteq \varphi_0, \varphi_1$, $a \in \delta\varphi_0$, $b \in \rho\varphi_1$.

Пусть A_1 и B_1 — алгебры, соответствующие единицам булевых алгебр

I^1 и I^2 соответственно. Для каждого n и каждого $\varphi \in S_n$ обозначим $\varphi' = \varphi|_{A_1}$ (т. е. $\delta\varphi' = \delta\varphi \cap A_1$ и $\varphi'a = \varphi a$ для любого $a \in \delta\varphi'$).

Если для некоторого $a \in \delta\varphi'$ $\varphi'a \in B_1$, то для любого $b \in \delta\varphi'$ $\varphi'b \in B_1$. Действительно, так как φ — изоморфизм и $a, b \in A_1$, то из $a\theta_A b$ следует $\varphi a \theta_B \varphi b$, и так как $\varphi a \in B_1$ то $\varphi b \in B_1$.

Для любого $k \in I^2$, по определению булевой суммы, B_k изоморфно B_1 . Поэтому, очевидно, мы можем предполагать, что для любого n и любого $\varphi \in S_n$ φ' будет частичным изоморфизмом из A_1 в B_1 . К тому же для любых $i \in I^1$ A_i изоморфно A_1 , и значит, показав, что $A_1 \equiv B_1$, мы докажем, что $A_i \equiv B_k$ для любых $i \in I^1$ и $k \in I^2$.

Так определяется последовательность $S'_0 \supseteq S'_1 \supseteq \dots \supseteq S'_n \supseteq \dots$ множеств частичных изоморфизмов из A_1 в B_1 .

Для любых n , $\varphi' \in S'_{n+1}$, $a \in A_1$, $b \in B_1$ существуют $\varphi'_0, \varphi'_1 \in S'_n$ такие, что $\varphi' \subseteq \varphi'_0, \varphi'_1$ и $a \in \delta\varphi'_0$, $b \in \rho\varphi'_1$. Действительно, для данных $\varphi \in S_n$, $a \in A$, $b \in B$ существуют $\varphi_0, \varphi_1 \in S_n$, $\varphi \subseteq \varphi_0, \varphi_1$, $a \in \delta\varphi_0$, $b \in \rho\varphi_1$ и наше утверждение становится очевидным.

Таким образом, A_1 и B_1 удовлетворяют условиям теоремы 1, и значит они элементарно эквивалентны. Предложение доказано.

Предложение 3. Если A и B — булевы суммы булевых алгебр A_i , $i \in I^1$, и B_k , $k \in I^2$, соответственно и для некоторых $i \in I^1$ и $k \in I^2$ $A_i \equiv B_k$, $I^1 \equiv I^2$, то A и B также элементарно эквивалентны (т. е. $A \equiv B$).

Доказательство. Так как $I^1 \equiv I^2$, то, по теореме 1, существует последовательность $Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ непустых множеств частичных изоморфизмов из I^1 в I^2 , удовлетворяющая условиям этой теоремы.

Пусть ψ — произвольный частичный изоморфизм из Z_n , где n произвольно. Так как $A_1 \equiv B_1$, то, по теореме 1, существует последовательность $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n \supseteq \dots$ непустых множеств частичных изоморфизмов из A_1 в B_1 .

Для каждого n и каждого $\psi \in Z_n$ и $\varphi \in S_n$ построим частичное отображение λ из A в B следующим образом: если $a \in A_i$, $i \in \delta\psi$ и $\varphi_{i,1}^A a \in \delta\varphi$, то $\lambda a = \varphi_{i,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi}^B a = \varphi_{1,\psi}^B (\varphi(\varphi_{i,1}^A a))$, где $\varphi_{i,1}^A$ и $\varphi_{1,\psi}^B$ — изоморфизмы из A_i в A_1 и из B_1 в $B_{\psi i}$ соответственно.

Покажем, что частичное отображение λ из A в B является частичным изоморфизмом.

Проверим верность равенства $\lambda \bar{a} = \overline{\lambda a}$.

Пусть $a \in A_s$. Из определения булевой суммы булевых алгебр имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{1,\psi}^B &= (\varphi_{\psi s,1}^B)^{-1} = (h_{\psi s,\psi s}^B \varphi_{\psi s,1}^B)^{-1} = (\varphi_{\psi s,1}^B)^{-1} (h_{\psi s,\psi s}^B)^{-1} = \varphi_{1,\psi}^B h_{\psi s,\psi s}^B, \quad \varphi_{s,1}^A = h_{s,s}^A \varphi_{s,1}^A, \\ \lambda \bar{a} &= \varphi_{s,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi}^B \bar{a} = h_{s,s}^A \varphi_{s,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi}^B h_{\psi s,\psi s}^B \bar{a} = h_{\psi s,\psi s}^B (\varphi_{s,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi}^B (h_{s,s}^A \bar{a})) = \\ &= h_{\psi s,\psi s}^B (\varphi_{s,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi}^B a) = h_{\psi s,\psi s}^B (\varphi_{s,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi}^B a) = h_{\psi s,\psi s}^B (\lambda a) = \bar{\lambda a}.\end{aligned}$$

Проверим $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$. Пусть $a \in A_s$, $b \in A_j$. Тогда $\lambda(a+b) = \varphi_{s+j,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi(s+j)}^B (a+b) = \varphi_{1,\psi(s+j)}^B (\varphi(\varphi_{s+j,1}^A (a+b))) = \varphi_{1,\psi(s+j)}^B (\varphi(1_{A_1} \cdot (a+b))) = \varphi_{1,\psi(s+j)}^B (\varphi(1_{A_1} \cdot a + 1_{A_1} \cdot b)) = \varphi_{1,\psi(s+j)}^B (\varphi(\varphi_{s,1}^A a + \varphi_{j,1}^A b)) = \varphi_{1,\psi(s+j)}^B (\varphi_{s,1}^A \varphi a + \varphi_{j,1}^A \varphi b)$, где 1_{A_1} и 1_{B_1} — единицы алгебр A_1 и B_1 соответственно.

Обозначим $c = \varphi_{s,1}^A \varphi a$ и $d = \varphi_{j,1}^A \varphi b$ и покажем, что $\varphi_{1,\psi(s+j)}^B (c+d) = \varphi_{1,\psi}^B c + \varphi_{1,\psi}^B d$.

Действительно, имеем $\varphi_{\psi(s+j),1}^B (\varphi_{1,\psi(s+j)}^B (c+d)) = c+d$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\psi(s+j),1}^B (\varphi_{1,\psi}^B c + \varphi_{1,\psi}^B d) &= (\varphi_{1,\psi}^B c) \cdot 1_{B_1} + (\varphi_{1,\psi}^B d) \cdot 1_{B_1} = \\ &= \varphi_{\psi s,1}^B (\varphi_{1,\psi}^B c) + \varphi_{\psi j,1}^B (\varphi_{1,\psi}^B d) = c+d.\end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda(a+b) = \varphi_{1,\psi(s+j)}^B (\varphi_{s,1}^A \varphi a + \varphi_{j,1}^A \varphi b) = \varphi_{1,\psi}^B (\varphi_{s,1}^A \varphi a) + \varphi_{1,\psi}^B (\varphi_{j,1}^A \varphi b) = \varphi_{s,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi}^B a + \varphi_{j,1}^A \varphi \varphi_{1,\psi}^B b = \lambda a + \lambda b$.

Аналогично доказывается, что $\lambda(a \cdot b) = \lambda a \cdot \lambda b$.

Таким образом, λ — частичный изоморфизм из A в B , и каждому n будет соответствовать непустое множество частичных изоморфизмов из A в B , которое обозначим через Φ_n . Очевидно, что $\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \dots \supseteq \Phi_n \supseteq \dots$. Покажем, что для каждого n и $\lambda \in \Phi_{n+1}$ и каждого $a \in A$, $b \in B$, существуют такие $\lambda_1, \lambda_2 \in \Phi_n$, что $\lambda \subseteq \lambda_1, \lambda_2$, $a \in \delta \lambda_1$ и $b \in \rho \lambda_2$.

Пусть $a \in A_i$, $b \in B_j$. Данному изоморфизму λ соответствуют $\psi \in Z_{n+1}$ и $\varphi \in S_{n+1}$. Для $\psi \in Z_{n+1}$, $i \in I^1$, $j \in I^2$ существуют такие $\psi_1, \psi_2 \in Z_{n+1}$, что $i \in \delta \psi_1, j \in \rho \psi_2$ и $\psi \subseteq \psi_1, \psi_2$. Аналогично для $\varphi \in S_{n+1}$, $\varphi_{i,1}^A a \in A_1$ и $\varphi_{j,1}^B b \in B_1$ существуют такие $\varphi_1, \varphi_2 \in S_n$, что $\varphi \subseteq \varphi_1, \varphi_2$, $\varphi_{i,1}^A a \in \delta \varphi_1$ и $\varphi_{j,1}^B b \in \rho \varphi_2$.

Отображениям φ_1 и ψ_1 соответствует $\lambda_1 \in \Phi_n$, (аналогично φ_2 и ψ_2 соответствует $\lambda_2 \in \Phi_n$). Легко заметить, что $\lambda \subseteq \lambda_1, \lambda_2$, $a \in \delta \lambda_1$ и $b \in \rho \lambda_2$. По теореме 1, $A \equiv B$. Предложение доказано.

Определение. Элементарной характеристикой булевой суммы A булевых алгебр $A_i, i \in I$, назовем пару $(ch(A), ch(I))$, где $ch(A_i)$ и $ch(I)$ — элементарные характеристики булевых алгебр A_i и I соответственно (т.е. $ch(A) = (ch(A_i), ch(I))$).

Так как каждая квазибулева алгебра с двумя бинарными и одной унарной операциями представляется в виде булевой суммы булевых алгебр, то следующая теорема является непосредственным следствием предложений 1–3 и теоремы 2.

Теорема 5. Если A и B – квазибулевы алгебры с двумя бинарными и одной унарной операциями, то они элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их элементарные характеристики $ch(A) = ch(B)$.

Кафедра алгебры и геометрии

Поступила 18.12.2001

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю.Л. Алгебра и логика, 1964, 3, № 3, с. 17–38.
2. Tarski A. Bull. Am. Math. Soc., 1949, v. 55, p. 63.
3. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1990.
4. Гончаров С.С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск.: Научная книга, 1996.
5. Черч А. Введение в математическую логику. М.: ИЛ, 1961, т. 1.
6. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
7. Taylor W. Acquationes Math, 1981, v. 23, p. 30–49.
8. Мовсисян Ю.М. Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1990.
9. Мовсисян Ю.М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1986.
10. Мовсисян Ю.М. – Изв. АН РФ, сер. Матем., 1992, т. 56, с. 654–672.
11. Мовсисян Ю.М. – УМН, 1998, т. 53, № 1, с. 61–114.
12. Мовсисян Ю.М. – Изв. АН РФ, сер. Матем., 1996, т. 60, № 6, с. 127–168.

L.M. BUDAGHIAN

ԶԿԱԶԻԲՈՒԼԵԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ՏԱՐԲԱԿԱՆ
ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄ

Ամփոփում

Բուլյան հանրահաշիվների գերնույնություններին բավարարող յուրաքանչյուր հանրահաշիվ կոչվում է քվազիբուլյան հանրահաշիվ: Հոդվածում տրվում է քվազիբուլյան հանրահաշիվների տարրական բնութագրումը:

L.M. BUDAGHIAN

ELEMENTARY CLASSIFICATION OF QUASI-BOOLEAN ALGEBRAS

Summary

An algebra is called a quasi-Boolean algebra if it satisfies hyperidentities of the variety of Boolean algebras. Elementary characterization is proven for quasi-Boolean algebras.