

Информатика

УДК 510.64

А.А. ЧУБАРЯН, О.Р. БОЛИБЕКЯН

О МИНИМАЛЬНЫХ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЯХ
АРИФМЕТИКИ РОБИНСОНА

Определяются секвенциальные аналоги минимальных исчислений для арифметики Робинсона с правилом сечения и без правила сечения. Доказана эквивалентность этих систем.

В задачах автоматизации поиска доказательств теорем работа с секвенциальными системами упрощает процесс поиска. Известно множество таких систем, однако нам не удалось найти среди них секвенциального аналога минимального исчисления. В данной статье определяется секвенциальный аналог исчисления минимальной арифметики Робинсона гильбертовского типа. В силу того, что доказательства без сечений обладают более простой стратегией поиска выводов, в работе также определяется исчисление минимальной арифметики Робинсона без правила сечения.

Далее мы будем придерживаться общепринятых определений переменной, терма, формулы, секвенции и подстановки, введенных в [1].

Определим исчисление минимальной арифметики Робинсона гильбертовского типа R_M как минимальное исчисление предикатов гильбертовского типа в [1] со следующими собственными аксиомами (a , b и c – предметные переменные, а 0 – индивидуальная константа):

$$\begin{array}{ll} a = a, & a' = 0 \supset 0' = 0, \\ a = b \supset b = a, & a = 0 \vee \exists b(b' = a), \\ a = b \supset (b = c \supset a = c), & a + 0 = a, \\ a = b \supset a' = b', & a + b' = (a + b)', \\ a = b \supset (a + c = b + c \ \& \ c + a = c + b), & a \cdot 0 = 0, \\ a = b \supset (a \cdot c = b \cdot c \ \& \ c \cdot a = c \cdot b), & a \cdot b' = a \cdot b + a, \\ a' = b' \supset a = b, & \end{array}$$

Перейдем теперь к определению системы минимальной арифметики Робинсона генценовского типа SR_M . В рамках этой системы предполагается, что A, B, C и D – произвольные формулы, Γ и Δ – конечные (возможно, пустые) последовательности формул, θ – пустая последовательность формул или последовательность, состоящая из одной формулы, a, b, c и

x – переменные, 0 – индивидуальная константа, $A(x)$ – формула, t – терм, свободный для x в $A(x)$, d – переменная, свободная для x в $A(x)$.

Аксиоматика системы SR_M состоит из схемы аксиом вида $C \rightarrow C$, где C – произвольная формула, и арифметических аксиом вида $\rightarrow \wp$, где $\wp$ – одна из собственных аксиом системы R_M . Приведем также правила вывода исчисления SR_M .

Логические правила вывода:

$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B}$,	$\frac{\Delta \rightarrow A \text{ и } B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \supset B, \Delta, \Gamma \rightarrow \theta}$,
$\frac{\Gamma \rightarrow A \text{ и } \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \& B}$,	$\frac{A, \Gamma \rightarrow \theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \theta}$, $\frac{B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \theta}$,
$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B}$, $\frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B}$,	$\frac{A, \Gamma \rightarrow \theta \text{ и } B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \theta}$,
$\frac{A, \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg A}$,	$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\neg A, \Gamma \rightarrow}$,
$\frac{\Gamma \rightarrow A(d)^*}{\Gamma \rightarrow \forall x A(x)}$,	$\frac{A(t), \Gamma \rightarrow \theta}{\forall x A(x), \Gamma \rightarrow \theta}$,
$\frac{\Gamma \rightarrow A(t)}{\Gamma \rightarrow \exists x A(x)}$,	$\frac{A(d), \Gamma \rightarrow \theta}{\exists x A(x), \Gamma \rightarrow \theta}$.

Структурные правила вывода:

уточнение (У)

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta}{C, \Gamma \rightarrow \theta},$$

сокращение (С)

$$\frac{C, C, \Gamma \rightarrow \theta}{C, \Gamma \rightarrow \theta},$$

перестановка (П)

$$\frac{\Delta, D, C, \Gamma \rightarrow \theta}{\Delta, C, D, \Gamma \rightarrow \theta},$$

сечение

$$\frac{\Delta \rightarrow C \text{ и } C, \Gamma \rightarrow \theta}{\Delta, \Gamma \rightarrow \theta}.$$

Следуя [1], правила, стоящие в левом столбце, будем называть сукцедентными и обозначать их через " $\rightarrow \supset$ ", " $\rightarrow \&$ ", " $\rightarrow \vee$ ", " $\rightarrow \neg$ ", " $\rightarrow \forall$ ", " $\rightarrow \exists$ " соответственно. Правила, стоящие в правом столбце, будем называть антецедентными и обозначать через " $\supset \rightarrow$ ", " $\& \rightarrow$ " и т.д. Отметим, что в исчислении SR_M нет " $\rightarrow \vee$ ", " $\rightarrow \supset$ ", " $\rightarrow \Pi$ " правил, а в правиле " $\neg \rightarrow$ " сукцедент заключения пуст.

* Переменная d постулата не входит свободно в его заключение. (Если $A(x)$ не содержит x свободно, то $A(d)$ есть $A(x)$, какова бы ни была переменная d ; в таких случаях мы условимся выбирать для анализа в качестве d переменную, не входящую свободно в заключение, так что ограничение будет соблюдаться).

Теорема 1. Если формула F выводима в R_M и все переменные остаются фиксированными, то секвенция $\rightarrow F$ выводима в SR_M . Если секвенция $\rightarrow F$ выводима в SR_M , то формула F выводима в R_M и все переменные являются фиксированными.

Замечание. Структурное правило " $\rightarrow U$ " необходимо при выводе интуиционистской аксиомы вида $\neg A \supset (A \supset B)$. Однако она не является аксиомой ни одной из систем, рассмотренных в данной статье.

Перейдем к определению секвенциального исчисления SR_M^- без правила сечения. Определим это исчисление как интуиционистское исчисление $G3$ ([1], §80) с добавлением арифметических аксиом исчисления SR_M со следующим ограничением: в правиле " $\neg \rightarrow$ " θ должно быть пусто.

Теорема 2. Если формула F выводима в R_M и все переменные остаются фиксированными, то секвенция $\Sigma \rightarrow F$ выводима в SR_M^- . Если секвенция $\Sigma \rightarrow F$ выводима в SR_M^- , то формула F выводима в R_M и все переменные являются фиксированными (в обеих частях теоремы Σ – список замкнутых формул, составленных из собственных аксиом исчисления R_M).

Кафедра алгебро-логических
методов информатики

Поступила 06.06.2002

ЛИТЕРАТУРА

1. Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

Ա.Ա. ՇՈՒԲԱՐԻԱՆ, Հ.Ռ. ԲՈԼԻԲԵԿԻԱՆ

ՌՈՒԲԻՆՍՈՆԻ ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻՆԻՄԱԼ ՍԵԿՎԵՆՑԻԱԼ
ՀԱՇՎԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում սահմանվում են Ռոբինսոնի թվաբանության մինիմալ հաշիվների սեկվենցիալ համակարգեր հատույթի կանոնով և առանց հատույթի կանոնի: Ապացուցված է նրանց համարթեքությունը:

A.A. CHUBARIAN, H.R. BOLIBEKIAN

ON THE MINIMAL SEQUENTIAL CALCULI OF ROBINSON'S
ARITHMETIC

Summary

Sequential calculi of minimal Robinson's arithmetic (with cut rule and cut-free) are defined in this paper. Equivalence of these calculi is proved.