ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2002 Естественные науки

Механика

УДК 531.36

С.Г. ШАГИНЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Показано, что при преобразовании Ляпунова сохраняется эквивалентность задач устойчивости по действующей силе систем с переменными и постоянными коэффициентами.

Получены необходимые и достаточные условия, при которых приводимая система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами устойчива, асимптотически устойчива или неустойчива по действующей силе.

1. Пусть имеем систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $A(t) \in C[t_0;\infty)$ – ограниченная действительная $n \times n$-матрица. Вместе с (1.1) рассмотрим также систему

$$\dot{x} = A(t)x + \varphi(t), \tag{1.2}$$

где вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в [1].

Предположим, что матрица $L(t) \in C^1[t_0;\infty)$ является матрицей Ляпунова [2], а система (1.1) приводима, т.е., сделав линейное преобразование

$$y = L(t)x, \tag{1.3}$$

(1.1) можно привести к системе

$$\dot{y} = By \tag{1.4}$$

с постоянной $n \times n$-матрицей B, где последняя матрица связана с матрицей Ляпунова $L(t)$ соотношением $L(t) = X(t)e^{-Bt}$. Здесь $X(t)$ – некоторая фундаментальная матрица системы (1.1) [2].

После преобразования (1.3) система (1.2) примет вид

$$\dot{y} = By + \psi(t), \tag{1.5}$$

где $\psi(t) = L(t)\varphi(t)$.

Покажем, что вектор-функция $\psi(t)$ также удовлетворяет всем условиям, указанным в [1].

Действительно, так как $L(t)$ есть матрица Ляпунова, то она ограничена, т.е. $\|L(t)\| = M < \infty$. Следовательно, а) используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left\|\int_{t_0}^{T}\psi(t)dt\right\| = \left\|\int_{t_0}^{T}L(t)\varphi(t)dt\right\| \le \left\|\int_{t_0}^{T}L(t)dt\right\|\cdot\left\|\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt\right\| \le \int_{t_0}^{T}\|L(t)\|dt\cdot\left\|\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt\right\| \le M(T-t_0)\cdot\left\|\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt\right\|,$$

и если $\left\|\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt\right\| < \delta$, то $\left\|\int_{t_0}^{T}\psi(t)dt\right\| \le M(T-t_0)\cdot\delta = \delta_1$;

б) так как $\varphi(t)\equiv 0$ при $t \ge T$, то $\psi(t) = L(t)\varphi(t) \equiv 0$ при $t \ge T$.

Таким образом, задача устойчивости по действующей силе (1.1) приводится к задаче устойчивости по действующей силе системы (1.4).

Известно [3], что при преобразовании Ляпунова характеристические показатели решений систем линейных дифференциальных уравнений сохраняются, а характеристические показатели решений (1.1) совпадают с вещественными частями корней характеристического уравнения $|B-\lambda E| = 0$, соответствующего системе (1.4).

Следовательно, верны следующие утверждения.

Теорема 1.1. Для того чтобы приводимая линейная система (1.1) была асимптотически устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические показатели ее решений были отрицательными.

Теорема 1.2. Для того чтобы приводимая система (1.1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические показатели ее были неположительными. Причем нулевым характеристическим показателям отвечают простые элементарные делители, если их рассматривать как нулевые значения соответствующей постоянной матрицы.

Во всех остальных случаях система (1.1) неустойчива по действующей силе.

2. Снова рассмотрим систему (1.1). Предположим, что матрица $A(t)$ абсолютно интегрируема в $[t_0;\infty)$, т. е.

$$\int_{t_0}^{\infty}\|A(t)\|dt = k < \infty, \tag{2.1}$$

тогда верно следующее утверждение.

Теорема 2.1. Если матрица $A(t)$ абсолютно интегрируема в $[t_0;\infty)$, то (1.1) устойчива по действующей силе.

Доказательство. Пусть в системе (1.1) матрица $A(t)$ абсолютно интегрируема, т.е. имеет место условие (2.1).

Известно [2] (с.157), что в этом случае все решения (1.1) ограничены в интервале $[t_0;\infty)$, а интеграл от следа матрицы $A(t)$ ограничен снизу, т.е.

$$\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \ge a > -\infty,$$

где a — некоторая постоянная.

Известно также [2] (с. 156), что при выполнении указанных условий с помощью преобразования Ляпунова систему (1.1) можно привести к виду

$$\frac{dy}{dt} = 0. \tag{2.2}$$

Очевидно, что характеристическое уравнение, соответствующее системе (2.2), имеет только корень $\lambda = 0$ с кратностью n, которому отвечают простые элементарные делители (ранг матрицы λE равен нулю при $\lambda = 0$).

Следовательно, согласно теореме об устойчивости по действующей силе [4], система (2.2) устойчива по действующей силе. Так как (см. выше) при преобразований Ляпунова задачи устойчивости по действующей силе эквивалентны, то из устойчивости по действующей силе системы (2.2) вытекает устойчивость по действующей силе (1.1). Теорема доказана.

3. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = e^{-t}x = A(t)x. \tag{3.1}$$

Покажем, что существует преобразование Ляпунова, приводящее уравнение (3.1) к виду

$$\dot{y} = 0 \tag{3.2}$$

Действительно, обозначим через

$$y = \exp\left(e^{-t}\right)x = b(t)x, \tag{3.3}$$

тогда $\dot{y} = \dot{x}\cdot\exp\left(e^{-t}\right) - x\cdot e^{-t}\cdot\exp\left(e^{-t}\right) = \exp\left(e^{-t}\right)\left(e^{-t}\cdot x - e^{-t}\cdot x\right) = 0$.

Так как функции $b(t) = \exp\left(e^{-t}\right)$ и $\dot{b}(t) = -e^{-t}\cdot\exp\left(e^{-t}\right)$ ограничены при $t \in [t_0;\infty)$ $\left(1 \le b(t) \le \exp\left(e^{-t_0}\right), \left|\dot{b}(t)\right| \le \dfrac{\exp\left(e^{-t_0}\right)}{e^{t_0}}\right)$, то (3.3) есть преобразование Ляпунова, и поскольку (3.2) устойчиво по действующей силе, то решения уравнения (3.1) также устойчивы по действующей силе.

С другой стороны, для уравнения (3.1) имеет место условие (2.1). Действительно,

$$\int_{t_0}^{\infty}\left\|A(t)\right\|dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-t}dt = e^{t_0} < \infty.$$

Следовательно, согласно теореме 2.1, система первого порядка (3.1) устойчива по действующей силе.

Автор выражает свою искренною благодарность доктору физмат наук, профессору Габриеляну М.С. за постоянное внимание к работе, а также за полезные советы и замечания.

Кафедра теоретической механики *Поступила 04.02.2002*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габриелян М.С., Шагинян С.Г.** – Ученые записки ЕГУ, 1987, №1, с. 27–32.
2. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 472 с.
3. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950, 471 с.

4. **Шагинян С.Г.** – Ученые записки ЕГУ, 1986, № 2, с. 39–46.

Ս.Գ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԸՍՏ ԱԶԴՈՂ ՈՒԺԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է փոփոխական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը: Ցույց է տրված, որ Լյապունովի ձևափոխության ժամանակ պահպանվում է փոփոխական և հաստատուն գործակիցներով գծային համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրների համարժեքությունը: Ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում փոփոխական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների բերվող համակարգը կայուն է, ասիմպտոտիկ կայուն է կամ անկայուն է ըստ ազդող ուժի:

S.G. SHAHINIAN

ON THE STABILITY OF ACTING FORCE OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CHANGEABLE COEFFICIENTS

Summary

The problem of stability depending on acting force of the system of the linear differential equations with changeable coefficients is considered. It is shown that Liapunov's reconstruction equivalence of tasks of stability depending on acting force of systems with changeable and with constant coefficients is preserved.

Necessary and sufficient conditions are obtained, under which the resulted system of the linear differential equations with changeable coefficients is stable, asymptotic stable or unstable depending on acting force.