

Ա.Դ. ԳԱԼՄՅԱՆ, Օ.Մ. ԱՐԱԿԵԼՅԱՆ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ ДВУХ ОБЩЕИЗВЕСТНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Получены волновые уравнения для изотропных неоднородных естественно-гиротропных сред на основании двух известных формулировок материальных уравнений. Показано, что при некоторых условиях имеется существенное различие между решениями волновых уравнений, соответствующих двум указанным формулировкам.

Введение. Установление материальных уравнений гиротропных сред является одним из тонких задач электродинамики (см., напр., [1]). Материальные уравнения таких сред постоянно подвергались уточнению. В настоящее время наиболее употребительны две системы материальных уравнений, предложенные в [1, 2]. Между ними в случае изотропных однородных сред установлено соответствие путем наложения определенного соотношения (см. ниже, пункт 1, (3)) между параметрами гиротропии, входящими, с одной стороны, в первую, а с другой – во вторую из указанных систем. Это соответствие основано на требовании одинаковости поворотов плоскости поляризации в случаях использования обеих систем материальных уравнений. Однако в случае неоднородных сред, насколько нам известно, они не сопоставлялись.

В данной статье поставлена именно такая задача.

1. Материальные уравнения

Ограничимся случаем изотропных сред. Тогда (первоисточники см. в [2]) материальные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + \gamma \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{2} [\nabla \gamma, \vec{E}], \\ \vec{B} &= \vec{H}.\end{aligned}\quad (1)$$

Указанные уравнения, соответствующие первоисточникам в [1], суть:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + \varepsilon \operatorname{arot} \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} + \mu \operatorname{arot} \vec{H}.\end{aligned}\quad (2)$$

В этих соотношениях ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, обычно имеющие величины порядка $\varepsilon \sim 1 \div 5, \mu \sim 1$.

В отсутствие неоднородности параметры $\mu, \varepsilon, \gamma, \alpha$ – постоянные; γ и α , ответственные за гиротропию, – величины порядка 10^{-11} в оптической области (ориентируясь величиной угла поворота плоскости поляризации $\vartheta_0 \approx 5^\circ$ на см и считая длину волны света $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см, из известного соотношения $\vartheta_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \gamma$ получаем $\gamma = 10^{-11}$). В дальнейшем будем считать, что $\mu = 1$ и что можно пренебречь слагаемым α^2 по сравнению с α .

Требование одинаковости поворотов плоскости поляризации, соответствующих системам (1) и (2), приводит к соотношению

$$\gamma = 2\varepsilon_0 \alpha. \quad (3)$$

При выполнении условия (3) материальные уравнения (1) и (2) в однородных средах сводятся к одинаковым волновым уравнениям. В неоднородных средах при том же условии (3) материальные уравнения (1) и (2) приводят к различным волновым уравнениям (см. ниже (4), (5)). Наша цель – показать, что в данном случае существенно различаются также решения волновых уравнений.

2. Волновые уравнения

Волновые уравнения для сред (1) и (2) соответственно с зависимостью ε от координаты z в виде $\varepsilon = \varepsilon_0 + az$ имеют следующие формы:

$$\text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + az) \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \gamma \text{rot } \vec{E} = 0, \quad (4)$$

$$\text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} - 2 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \alpha \text{rot } \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \alpha [\vec{a}, \vec{E}] - \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + az) \vec{E} = 0, \quad \vec{a} = (0, 0, a) \quad (5)$$

((4) получается из (1), а (5) – из (2)).

При выводе (4) и (5) мы исходили из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{и считали, что зависимость полей от времени дается множителем } e^{-i\omega t}.$$

3. Приближенные решения волновых уравнений

Рассмотрим простейший случай, когда волны распространяются вдоль оси z . Тогда они поперечны, т. е. $E_z = 0$ (см. дополнение). Для величин $f_{\pm} = E_x \pm iE_y$ (пренебрегая членами, пропорциональными α^2) приходим к следующим уравнениям:

$$f_+'' + 2i \frac{\omega^2}{c^2} \alpha \varepsilon_0 f_+' + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + az) f_+ = 0, \quad (6)$$

$$f_-'' - 2i \frac{\omega^2}{c^2} \alpha \varepsilon_0 f_-' + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + az) f_- = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{f}_+'' + 2i \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + az) \tilde{f}_+' + \frac{\omega^2}{c^2} (i\alpha a + \varepsilon_0 + az) \tilde{f}_+ = 0, \quad (8)$$

$$\tilde{f}_-'' - 2i \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + az) \tilde{f}_-' + \frac{\omega^2}{c^2} (-i\alpha a + \varepsilon_0 + az) \tilde{f}_- = 0. \quad (9)$$

Уравнения (6), (7) получаются из (4), а (8), (9) – из (5). Заметим, что (7) можно получить из (6), а (9) из (8), если α заменить на $-\alpha$.

Чтобы “избавиться” от наличия производных первого порядка в этих уравнениях, их решения будем искать в виде произведений, напр., решение уравнения (6) – в виде $f_+(z) = U_+(z)V_+(z)$.

Получим

$$U_+'' V_+ + (2V_+' + 2i \frac{\omega^2}{c^2} \alpha \varepsilon_0 V_+) U_+' + \left[V_+'' + 2i \frac{\omega^2}{c^2} \alpha \varepsilon_0 V_+' + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + az) \right] U_+ = 0. \quad (10)$$

Пусть V_+ удовлетворяет уравнению

$$V_+' + i \frac{\omega^2}{c^2} \alpha \varepsilon_0 V_+ = 0.$$

Тогда $V_+(z) = e^{-i \frac{\omega^2}{c^2} \alpha \varepsilon_0 z}$ и относительно $U_+(z)$ получается уравнение

$$U_+'' + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\varepsilon_0 (1 + \frac{\omega^2}{c^2} \alpha^2 \varepsilon_0) + az \right] U_+ = 0. \quad (11)$$

Если

$$\frac{\omega^2}{c^2} \alpha^2 \varepsilon_0 \ll 1, \quad (12)$$

то (11) принимает вид

$$U_+'' + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + az) U_+ = 0. \quad (13)$$

Итак, решение уравнения (2) имеет вид

$$f_+(z) = e^{-i \frac{\omega^2}{c^2} \alpha \varepsilon_0 z} U_+(z), \quad (14)$$

где $U_+(z)$ удовлетворяет уравнению (13).

Аналогично для решений уравнений (7)–(9) получаем соответственно

$$f_{-}(z) = e^{i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\epsilon_0 z} U_{-}(z), \quad (15)$$

$$\tilde{f}_{+}(z) = e^{-i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha(\epsilon_0 z + \frac{\alpha z^2}{2})} \tilde{U}_{+}(z), \quad (16)$$

$$\tilde{f}_{-}(z) = e^{i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha(\epsilon_0 z + \frac{\alpha z^2}{2})} \tilde{U}_{-}(z). \quad (17)$$

Причем все функции $U_{\pm}(z), \tilde{U}_{\pm}(z)$ удовлетворяют уравнению (13), которое имеет два линейно независимых решения: $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (см [3]). Тогда для уравнения (5) линейно независимыми решениями будут (см. (14))

$$e^{-i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\epsilon_0 z} \varphi(z) \text{ и } e^{-i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\epsilon_0 z} \psi(z). \quad (18)$$

Общие решения уравнений (6) и (7) будут

$$f_{+}(z) = A_{+} e^{-i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\epsilon_0 z} \varphi(z) + B_{+} e^{-i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\epsilon_0 z} \psi(z), \quad (19)$$

$$f_{-}(z) = A_{-} e^{i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\epsilon_0 z} \varphi(z) + B_{-} e^{i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\epsilon_0 z} \psi(z), \quad (20)$$

где $A_{+}, A_{-}, B_{+}, B_{-}$ постоянные.

Аналогично получаем, что общие решения уравнений (8) и (9) имеют вид

$$\tilde{f}_{+}(z) = \tilde{A}_{+} e^{-i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha(\epsilon_0 z + \frac{\alpha z^2}{2})} \varphi(z) + \tilde{B}_{+} e^{-i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha(\epsilon_0 z + \frac{\alpha z^2}{2})} \psi(z), \quad (21)$$

$$\tilde{f}_{-}(z) = \tilde{A}_{-} e^{i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha(\epsilon_0 z + \frac{\alpha z^2}{2})} \varphi(z) + \tilde{B}_{-} e^{i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha(\epsilon_0 z + \frac{\alpha z^2}{2})} \psi(z). \quad (22)$$

Отсюда следует, что решения уравнений (6), (8) и (7), (9) существенно различны. Различие проявляется в том, что линейно независимые решения

уравнения (2) имеют дополнительный множитель вида $e^{\pm i\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\frac{\alpha z^2}{2}}$ по сравнению с решениями (1). Это различие имеет колебательный характер. Полученное означает, что различие систем (1) и (2) материальных уравнений (при выполнении условия (12)) приводит к различию в решениях соответствующих волновых уравнений.

Следовательно, для неоднородных сред уравнения (1) и (2) (или хотя бы одно из них) нуждаются в уточнении.

Поставленный в настоящей статье вопрос, на наш взгляд, имеет фундаментальное значение, а также представляет интерес в областях исследований невязимости в средах с пространственной дисперсией [4–6].

Заметим, задача решения уравнений (1), (2) свелась к решению более простого уравнения (13), что можно искать в виде степенного ряда. Это дает

возможность с любой наперед заданной точностью решить его с заданными начальными условиями.

Дополнение. Рассмотрим случай, когда параметры среды зависят только от координаты z . В силу симметрии направление распространения везде остается параллельным оси z , производные $\vec{E}$ по x и y равны нулю. Тогда из (4) получаем

$$\frac{\omega^2}{c^2}(\epsilon_0 + az)E_z = 0. \quad (a)$$

Откуда при условии $\epsilon_0 + az \neq 0$ следует, что

$$E_z = 0. \quad (b)$$

Тот же результат получается и из (5). То есть волна поперечна относительно $\vec{E}$, причем на любом расстоянии от границы.

Задача предложена проф. О.С. Ерицяном и решена при его постоянном содействии.

Кафедра высшей математики физфака

Поступила 11.07.2001,
после доработки 12.04.2002

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1976.
2. Агранович В.М., Гинзбург В.Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1979.
3. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981.
4. Новиков М.А., Хышов А.А. – Оптика и спектроскопия, 1999, т. 87, с. 416.
5. Новиков М.А., Геликонов Г.В. – Оптика и спектроскопия, 1993, т. 75, с. 854.
6. Мармазеев М.В., Рязанов М.И. – ЖЭТФ, 1997, т. 112, с. 1557.

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Հ. Մ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ԳԻՐՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՀԱՍԱՐ ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ՀԱՆՐԱՀԱՅՏ ՏԱՐԲԵՐԱԿՆԵՐԻ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՍԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Իզոտրոպ ոչ համասեռ գիրոտրոպ միջավայրերի համար ստացված են ալիքային հավասարումների երկու հանրահայտ նյութական հավա-

սարումների ձևակերպումներին հիման վրա [1, 2]: Ցույց է տրված, որ որոշ պայմանների դեպքում էական տարբերություն կա այդ երկու ձևակերպումների համապատասխան ալիքային հավասարումների լուծումների միջև:

A.G. GALUMIAN, H.M. ARAKELIAN

MATHEMATICAL COMPARISON OF TWO WELL-KNOWN PATTERNS OF MATERIAL EQUATIONS FOR GYROTROPIC MEDIA

Summary

Two wave equations for isotropic, heterogeneous naturally gyrotropic media, based on two well-known formula of material equations are derived.

It is shown that under certain conditions there exist substantial distinctions between solutions of wave equations corresponding to the two aforesaid equations.