

Х.А. ХАЧАТРЯН

# ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

В работе рассматривается одно интегральное уравнение типа Вольтерра со стохастическим ядром. Специальная факторизация позволяет свести исходное уравнение к уравнению со сжимающим оператором. а также в зависимости от свойств свободного члена найти асимптотику его решения на бесконечности. Показано, что полученная оценка является точной. Результаты распространяются на уравнение Вольтерра с переменным нижним пределом.

**1. Интегральное уравнение Вольтерра с переменным верхним пределом.**  
Рассмотрим следующее интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$f(x) = g(x) + \int_0^x v(x, t) f(t) dt, \quad (1)$$

где 
$$v(x, t) = \begin{cases} \int_a^b \alpha(t, s) e^{-\alpha(t, s)(x-t)} d\sigma(s), & \text{если } x \geq t, \\ 0, & \text{если } x < t. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\alpha(t, s)$  – положительная функция на  $[0, +\infty) \times [a, b]$ , а  $\sigma(s)$  – неубывающая функция на  $[a, b]$ , удовлетворяющая условию

$$\int_a^b d\sigma(s) = 1. \quad (3)$$

Заметим, что ядро уравнения (1) является стохастическим, т. е.

$$\int_0^\infty v(x, t) dx = 1. \quad (4)$$

Обозначим через  $M_+$  пространство ограниченных функций на  $[0, +\infty)$ , а  $L_1^+$  – пространство  $L_1(0, +\infty)$ .

Перепишем уравнение (1) в операторной форме

$$(I - V)f = g, \quad (1')$$

где  $I$  – единичный оператор, а  $V$  – оператор, действующий в пространстве  $L_1^+ \cap M_+$ , причем  $V: L_1^+ \cap M_+ \rightarrow L_1^+ \cap M_+$ ,

$$(Vf)(x) = \int_0^x v(x, t) f(t) dt. \quad (5)$$

Ниже будет показано, что если  $g \in L_1^+ \cap M_+$ , то  $f(x) = g(x) + F(x)$ , где  $F(x) \sim O(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , а если  $g \in M_+$ , то решение уравнения (1) обладает асимп-

тотикой  $f(x) = O(x)$ . В конце работы приведены результаты по асимптотическому поведению для соответствующего уравнения Вольтерра с переменным нижним пределом.

Изучение уравнения (1) является подготовительным этапом для дальнейшего рассмотрения соответствующего интегрального уравнения на полуоси, которое возникает в физической кинетике и имеет важное применение в кинетической теории газов, теории переноса излучения и др. [1], а также представляет самостоятельный математический интерес.

Пусть оператор  $U$ , действующий в пространстве  $L_1^+ \cap M_+$ , имеет вид

$$(Uf)(x) \equiv \beta \int_0^x f(t) dt; \quad U: L_1^+ \cap M_+ \rightarrow M_+, \quad (6)$$

где  $\beta$  – произвольное положительное число.

Воздействуем слева на обе части уравнения (1') оператором  $I + U$ . В результате получаем

$$(I - W)f = \tilde{g}, \quad (7)$$

$$W = UV - U + V, \quad \tilde{g} = g + Ug, \quad W: L_1^+ \cap M_+ \rightarrow M_+. \quad (8)$$

Пусть  $w(x, y)$  – ядро оператора  $W$ . После простых выкладок получаем

$$w(x, y) = \int_a^b e^{-\alpha(y, s)\chi(x-y)} [\alpha(y, s) - \beta] d\sigma(s) \cdot \theta(x - y), \quad (9)$$

где 
$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

*Лемма.* Пусть  $h(x)$  – произвольная функция из пространства  $L_1^+ \cap M_+$ . Тогда имеет место неравенство

$$|(Wh)(x)| \leq \delta \|h\|_{M_+}, \quad (10)$$

где 
$$\delta = \int_a^b \sup_{y \in [0, +\infty)} \left| \alpha(y, s) - \beta \right| \frac{d\sigma(s)}{\alpha_0(s)}, \quad \alpha_0(s) = \inf_{y \in [0, +\infty)} \alpha(y, s). \quad (11)$$

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} |(Wh)(x)| &\leq \int_0^x |w(x, y)h(y)| dy \leq \|h\|_{M_+} \int_0^x dy \int_a^b e^{-\alpha(y, s)\chi(x-y)} |\alpha(y, s) - \beta| d\sigma(s) \leq \\ &\|h\|_{M_+} \int_0^x dy \int_a^b e^{-\alpha_0(s)\chi(x-y)} |\alpha(y, s) - \beta| d\sigma(s) \leq \\ &\leq \|h\|_{M_+} \int_a^b \sup_{y \in [0, +\infty)} |\alpha(y, s) - \beta| d\sigma(s) \int_0^x e^{-\alpha_0(s)\chi(x-y)} dy \leq \|h\|_{M_+} \delta. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Предположим, что

$$\delta < 1. \quad (12)$$

i) Пусть  $g \in L_1^+ \cap M_+$ .

При выполнении условия (12) оператор  $W$  является сжатием в  $L_1^+ \cap M_+$ .

Рассмотрим ряд Неймана

$$f(x) = g(x) + (Ug)(x) + (WUg)(x) + (W^2Ug)(x) + (Wg)(x) + (W^2g)(x) + \dots \quad (13)$$

Учитывая (9), (10) и изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$|(WUg)(x)| = \beta \left| \int_0^x w(x, y) dy \int_0^y g(t) dt \right| \leq \beta \|g\|_{L_1} \delta. \quad (14)$$

Заметим, что из (10) и из условия  $\int_b^a \sup_{t \in [0, +\infty)} \text{ess} |\alpha(t, s) - \beta| d\sigma(s) < +\infty$  следует, что

$$|(Wg)(x)| \leq \delta \|g\|_{M_+}. \quad (15)$$

Тогда с учетом (12)–(15) получаем, что решение уравнения (1)–(3) имеет следующую структуру:  $f(x) = g(x) + F(x)$ ,

где  $g \in L_1^+ \cap M_+$ , а

$$|F(x)| \leq \|g\|_{L_1} \frac{\beta}{1-\delta} + \frac{\|g\|_{M_+} \delta}{1-\delta}, \text{ т. е. } F(x) = O(1) \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

ii) Пусть теперь  $g \in M_+$  и  $g(x) \geq 0$ . Тогда

$$\tilde{g}(x) = g(x) + \beta \int_0^x g(t) dt \geq 0. \quad (17)$$

Перепишем уравнение (7) в раскрытой форме:

$$f(x) = \tilde{g}(x) + \int_0^x w(x, t) f(t) dt. \quad (18)$$

Рассмотрим следующую итерацию для (18):

$$f_{n+1}(x) = \tilde{g}(x) + \int_0^x w(x, t) f_n(t) dt, \quad f_0(x) = \tilde{g}(x). \quad (19)$$

Из (17) по индукции следует, что функции  $f_n(x)$  неубывающие по  $n$ . Если  $g(x)$  – неубывающая на  $[0, \infty)$  функция, то функции  $f_n(t)$  – неубывающие по  $t$  на каждом  $[0, x]$ . Следовательно, из доказанной леммы и из (19) получаем  $f_n(x) \leq \frac{\tilde{g}(x)}{1-\delta}$ .

Для каждого фиксированного  $x$  последовательность  $f_n(x)$  по  $n$  монотонна и ограничена. Следовательно, при  $n \rightarrow +\infty$  последовательность  $f_n(x)$  имеет предел  $f(x)$ . Легко убедиться, что  $f(x)$  является решением уравнения (18), причем

$$f(x) \leq \frac{g(x) + \beta \int_0^x g(t) dt}{1-\delta}, \text{ т. е. } f(x) = O(x) \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

Итак нами доказана

**Теорема 1.** Пусть  $\beta > 0$ ,  $\alpha(t, s)$  – некоторая положительная и ограниченная по  $t (t \in [0, +\infty))$  функция, для которой интегралы

$$\delta = \int_a^b \frac{\sup_{t \in [0, +\infty)} \text{ess} |\alpha(t, s) - \beta|}{\inf_{t \in [0, +\infty)} \text{ess} \alpha(t, s)} d\sigma(s), \quad \int_b^a \sup_{t \in [0, +\infty)} \text{ess} |\alpha(t, s) - \beta| d\sigma(s)$$

сходятся ( $0 \leq a < b \leq +\infty$ ), причем  $\delta < 1$ . Тогда

1) если  $g \in L_1^+ \cap M_+$ , то единственное решение  $f(x)$  уравнения (1) имеет следующую структуру:  $f(x) = g(x) + F(x)$ , где  $F(x) = O(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;

2) если  $g \in M_+$  – неубывающая функция на  $[0, \infty)$ , то единственное решение  $f(x)$  уравнения (1) имеет асимптотику  $f(x) = O(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . ►

*Замечание 1.* Следует отметить, что если  $\alpha(t, s) \equiv \beta$  (т. е.  $\delta = 0$ ), то ядро уравнения (1) становится зависящим от разности аргументов, и мы приходим к уравнению восстановления

$$f(x) = g(x) + \int_0^x v(x-t) f(t) dt. \quad (21)$$

Хорошо известно, что если выполняются условия  $v(x) \geq 0$ ;  $\int_0^x v(t) dt = 1$ ,  $m_1 = \int_0^\infty tv(t) dt < +\infty$ ,  $g \in L_1^+$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , то существует предел решения уравнения (21), который определяется по формуле [2, 3]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{m_1} \int_0^\infty g(t) dt. \quad (22)$$

Легко заметить, что в этом частном случае  $m_1 = \frac{1}{\beta}$  и равенство (22) свидетельствует о том, что оценка (16) является «точной».

Отметим также, что асимптотика  $f(x) = O(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  для уравнения восстановления (когда  $\alpha(t, s) = \text{const}$ ) со свободным членом  $g(x) = 1$  была получена в работе [4].

*Предложение.* Пусть

$$1. \alpha(t, s) \geq 0 \text{ на } [0, +\infty) \times [a, b], \quad \int_b^a \sup_{t \in [0, +\infty)} |\alpha(t, s) - \beta| d\sigma(s) < +\infty,$$

$$2. \delta < 1,$$

3.  $g \in L_1^{loc}[0, +\infty)$  – неубывающая, неотрицательная функция. Тогда для решения уравнения (1) имеет место следующая оценка :

$$f(x) \leq \frac{g(x) + \beta \int_0^x g(t) dt}{1 - \delta}. \quad (23)$$

*Доказательство.* Заметим, что если  $g \in L_1^{loc}[0, +\infty)$ , то и  $\tilde{g} \in L_1^{loc}[0, +\infty)$ . Применяя итерационный процесс по отношению к уравнению (18) и совершая такие рассуждения, какие делали в теореме 1, мы приходим к оценке (23). ►

*Пример.* В качестве  $\alpha(t, s)$  может служить следующая функция:

$$\alpha(t, s) = \beta + \gamma(t, s),$$

$$\text{где } |\gamma(t, s)| \leq \frac{\beta}{2} - \varepsilon, \quad (0 < \varepsilon < \frac{\beta}{2}), \quad \text{тогда } \delta = \frac{\beta - 2\varepsilon}{\beta + 2\varepsilon} < 1.$$

**2. Интегральное уравнение Вольтерра с переменным нижним пределом.** Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра с пределами  $(x, +\infty)$

$$f(x) = g(x) + \int_x^\infty v(x, t) f(t) dt, \quad (24)$$

где

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_a^b \alpha(t, s) e^{-a(t, s)(t-x)} d\sigma(s), & \text{если } x \leq t, \\ 0, & \text{если } x > t. \end{cases} \quad (25)$$

Перепишем уравнение (24) в операторной форме

$$(I - V)f = g, \quad (26)$$

где  $I$  – единичный оператор, а  $V$  – оператор, действующий в пространстве  $L_1^+ \cap M_+$ , причем  $V: L_1^+ \cap M_+ \rightarrow L_1^+ \cap M_+$ ,

$$(Vf)(x) \equiv \int_x^{+\infty} v(x, t) f(t) dt. \quad (27)$$

Имеет место

**Теорема 2.** Пусть  $\beta > 0$  – произвольное число,  $\alpha(t, s)$  – положительная и ограниченная по  $t \in (0, +\infty)$  функция, такая, что интегралы

$$\rho = \int_a^b \sup_{t \in (0, +\infty)} \left| 1 - \frac{\beta}{\alpha(t, s)} \right| d\sigma(s), \quad \int_a^b \sup_{t \in (0, +\infty)} |\alpha(t, s) - \beta| d\sigma(s)$$

сходятся, причем  $\rho < 1$ . Тогда если  $g \in L_1^+ \cap M_+$ ,  $\mu_1 = \int_0^{+\infty} tg(t)dt < +\infty$ , то решение

уравнения (24) имеет следующую структуру:  $f(x) = \tilde{g}(x) + G(x)$ , где

$$\|G(x)\|_{L_1^+} \leq \frac{\|\tilde{g}\|_{L_1^+} \rho}{1 - \rho}, \quad \tilde{g}(x) = g(x) + \beta \int_x^{+\infty} g(t) dt.$$

*Доказательство.* Не вдаваясь в подробности, отметим: для доказательства теоремы достаточно учесть, что в качестве  $U$  необходимо рассмотреть оператор

$$(Uf)(x) = \beta \int_x^{+\infty} f(t) dt, \quad U: L_1^+ \cap M_+ \rightarrow L_1^+ \cap M_+, \text{ и привести рассуждения, аналогичные}$$

вышеприведенным (см. (6)–(8)). Тогда уравнение (26) сводится к следующему уравнению:

$$(I - W)f = \tilde{g}, \quad W: L_1^+ \cap M_+ \rightarrow L_1^+ \cap M_+, \quad (Wf)(x) = \int_x^{+\infty} w(x, t) f(t) dt.$$

Из условия теоремы следует, что  $\tilde{g} \in L_1^+ \cap M_+$ .

Рассмотрим ряд Неймана

$$f(x) = \tilde{g}(x) + (W\tilde{g})(x) + (W^2\tilde{g})(x) + \dots \quad (28)$$

Имеем

$$\|(W\tilde{g})(x)\|_{L_1^+} = \int_0^{+\infty} \left| \int_x^{+\infty} w(x, t) \tilde{g}(t) dt \right| dx \leq \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} |w(x, t)| |\tilde{g}(t)| dt dx = \int_0^{+\infty} |\tilde{g}(t)| dt \int_0^t |w(x, t)| dx < \|\tilde{g}\|_{L_1^+} \rho.$$

При выполнении условия  $\rho < 1$  оператор  $W$  является сжимающим в  $L_1^+ \cap M_+$ , следовательно, ряд Неймана сходится абсолютно и равномерно на  $R^+$  и представляет собой решение уравнения (24). Тогда из (28) следует, что  $f(x) = \tilde{g}(x) + G(x)$ , где

$$\|G(x)\|_{L_1^+} \leq \frac{\|\tilde{g}\|_{L_1^+} \rho}{1 - \rho}. \quad \blacktriangleright$$

**Замечание 2.** Условие  $\rho < 1$  является более слабым по сравнению с (12).

*Автор выражает глубокую благодарность проф. Н.Б. Енгибаряну за постановку задачи, а также проф. Л.Г. Арабаджяну и Г.А. Григоряну за обсуждения и полезные советы.*

*Кафедра дифференциальных уравнений*

*Поступила 11.03.2002*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х. – Ж. Выч. математики и математической физики, 1998, т. 38, № 3.
2. Феллер Ф. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
3. Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б. – Итоги науки и техники. Мат. анализ, М., 1984, т. 22, с. 175–244.
4. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

Խ.Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

## ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ՏԻՊԻ ՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆԸ

### Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվել է ստոխաստիկ կորիզով Վոլտերայի տիպի մի ինտեգրալ հավասարում: Հատուկ ֆակտորիզացիան հնարավորություն է տալիս սկզբնական հավասարումը հանգեցնել սեղմող օպերատորով հավասարման, ինչպես նաև գտնել լուծման ասիմպտոտիկական անվերջությունում՝ կախված ազատ անդամի հատկություններից: Ցույց է տրվում, որ ստացված գնահատականը ճշգրիտ է: Արդյունքները տարածվում են փոփոխական ստորին սահմանով Վոլտերայի տիպի հավասարման վրա:

Kh.A. KHACHATRIAN

## THE ETIMATION OF SOLUTION OF ONE VOLTERYAN TYPE INTEGRAL EQUATION

### Summary

In present paper one Volterian type integral equation with stochastic kernel is considered. Special factorization allows to reduce it to new equation with contracted operator, as well as to find asymptotic behavior of the solution depending on properties of free term. It was shown that obtained estimation is exact. The results for Volterian type equation with variable lower limit are applied.