

УДК 539.3.62.50

А.А. ГУКАСЯН, В.К. СТЕПАНЯН

ИГРОВОЙ ПОДХОД К УПРАВЛЕНИЮ ДВУХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ

Для двухзвенного манипулятора с тремя степенями подвижности исследуются игровые задачи сближения–уклонения с заданным целевым множеством при разных ограничениях на управляющие воздействия и на минимакс квадратичного функционала. Полученные оптимальные решения для линейной модели используются для нелинейной, с помощью дополнительного регулятора.

Введение. В работе делается попытка создать систему управления двухзвенным манипулятором с тремя степенями подвижности, при чем движение по каждой степени создается двумя управляющими воздействиями, которые противодействуют друг другу. Этот конфликт имеет виртуальный смысл и заключается в том, что один из этих управляющих воздействий (первый игрок) исполняет роль движущей силы, а другой (второй игрок) – удерживающей, обеспечивая тем самым плавное движение манипулятора.

1. Расчетная модель двухзвенного манипулятора и уравнения движений. Рассматривается двухзвенный антропоморфный манипулятор типичной конструкции [1], состоящий из подвижной платформы и механической руки со схватом (рис. 1). Предполагается, что рука представляет

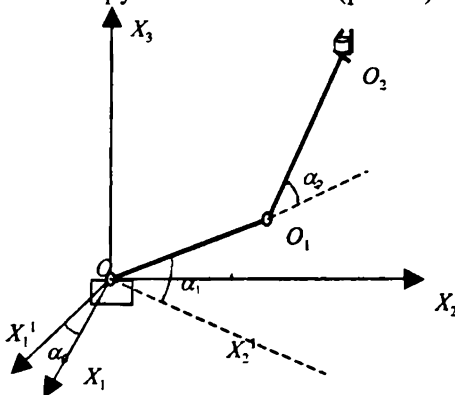


Рис. 1.

собой два абсолютно твердых тела (звена), соединенных шарниром O_1 . Первое звено посредством шарнира O связано с платформой, а на конце второго расположен схват с грузом M_3 . Шарниры O , O_1 , O_2 идеально цилиндрические. Управление движениями манипулятора осуществляется при помощи электромеханических приводов (динамика приводов не учитывается) [2, 3]. Для описания движения манипулятора введем две прямоугольные системы координат $OX_1X_2X_3$

и $OX_1^1 X_2^1 X_3$ с общим началом O и осью OX_3 , совпадающей с осью вращения платформы. Система координат $OX_1 X_2 X_3$ неподвижная, а $OX_1^1 X_2^1 X_3$ жестко связана с платформой, координатная плоскость $OX_2^1 X_3$ совпадает с плоскостью руки манипулятора.

Введем обозначения: α_0 – угол поворота платформы, α_1 – угол между первым звеном и осью OX_2^1 , α_2 – угол между звеньями руки манипулятора, $L_1 = (OO_1)$ – длина первого звена, $L_2 = (O_1 O_2)$ – длина второго звена, I_1 – расстояние от оси шарнира O до центра масс (M_1) первого звена, I_2 – расстояние от оси шарнира O_1 до центра масс (M_2) второго звена.

Движение манипулятора описывается системой уравнений Лагранжа второго рода [4]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} + Q_i \quad (i=0,1,2), \quad (1.1)$$

где обобщенные силы Q_i ($i=1,2,3$) состоят из двух слагаемых, первый из которых является движущей силой, а второй – удерживающей.

Для упрощения уравнений движения предполагаем, что вращение манипулятора в целом относительно оси OX_3 происходит независимо от остальных движений. При этом уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} A_{00}\ddot{\alpha}_0 &= n_0 u_0 - m_0 v_0; \quad A_{11}\ddot{\alpha}_1 + A_{12}\ddot{\alpha}_2 + f_{11}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = n_1 u_1 - m_1 v_1, \\ A_{12}\ddot{\alpha}_1 + A_{22}\ddot{\alpha}_2 + f_{22}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= n_2 u_2 - m_2 v_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $A_{00} = J_0 + [M_1 l_1^2 + (M_2 + M_3) L_1^2] \cos^2 \alpha_1 + (M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2) \cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + (M_2 l_2 + M_3 L_2) L_1 \cos \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \text{const}$;

$$\begin{aligned} A_{11} &= M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2 + L_1^2 (M_2 + M_3) + L_2^2 M_3, \quad A_{12} = A_{21} = A_{22} = M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2; \\ f_{11}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= (M_2 L_1 l_2 + M_3 L_1 L_2) (2\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 + \ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - 2\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2) + \\ &+ \frac{1}{2} [M_1 l_1^2 + (M_2 + M_3) L_1^2] \sin 2\alpha_1 + (M_1 l_1 + (M_2 + M_3) L_1) g \cos \alpha_1 + (M_2 l_2 + M_3 L_2) g \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ f_{22}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= (M_2 L_1 l_2 + M_3 L_1 L_2) (\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 + \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_2) + (M_2 l_2 + M_3 L_2) g \cos(\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$t' = t/T_*, \quad u_i = n_i u_i T_*^2 / A_{ii}, \quad v_i = m_i v_i T_*^2 / A_{ii} \quad (i=0,1,2). \quad (1.4)$$

В обозначениях (1.4) T_* – принятое за единицу измерения характерное время рабочей транспортной операции, осуществляемой манипулятором. Углы поворотов платформы, схвата и звеньев руки манипулятора суть величины порядка единицы $\alpha_i \sim 1$ ($i=0,1,2$). Тогда для безразмерных переменных системы (1.2) выполняются следующие соотношения порядков: $u_i \sim 1, v_i \sim 1, \dot{\alpha}_i \sim 1, \ddot{\alpha}_i \sim 1$ ($i=0,1,2$) [2, 3].

Рассматривается случай, когда параметры системы (1.2) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{|f_{11}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})|}{A_{11}} \ll 1, \frac{|f_{22}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})|}{A_{22}} \ll 1. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2) принимают вид

$$A_1 \ddot{\alpha} + \mathcal{E}f(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = u' - v', \quad (1.6)$$

где $h = \frac{A_{12}}{A_{11}}$, $\frac{|f_{11}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})|}{A_{11}} = \mathcal{E}^1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$, $\varepsilon \ll 1$, $\frac{|f_{22}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})|}{A_{22}} = \mathcal{E}^2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$,

$$f'(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \sim 1, \quad u' = (u'_0, u'_1, u'_2)^T, \quad v' = (v'_0, v'_1, v'_2)^T.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\alpha} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_0 \\ \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

2. Игровые задачи управления движением манипулятора. Рассмотрим две позиционные игровые задачи управления.

Задача 1. Первый игрок, оперирующий управлением $u' = (u'_0, u'_1, u'_2)$, стремится привести манипулятор из заданного начального состояния $(t_0, \alpha_i^0, \dot{\alpha}_i^0, i = 0, 1, 2)$ в конечное $(T, \alpha_i^{(1)}, \dot{\alpha}_i^{(1)}, i = 0, 1, 2)$ и минимизировать заданный функционал $J[u, v]$ на движениях системы (1.6). А второй игрок, оперирующий управлением $v' = (v'_0, v'_1, v'_2)$, стремится уклонить манипулятор от цели $(T, \alpha_i^{(1)}, \dot{\alpha}_i^{(1)}, i = 0, 1, 2)$ и максимизировать функционал $J[u, v]$. Игроки при этом выбирают свои стратегии из класса позиционных [5]. Для исследования поставленной задачи будем использовать линейную модель уравнения движения манипулятора ($\varepsilon = 0$).

Для удобства дальнейших исследований примем за конечное состояние начало координат фазового пространства и $t_0 = 0$. Введем следующие обозначения:

$$\alpha_0 = x_1, \quad \dot{\alpha}_0 = x_2, \quad \alpha_1 = x_3, \quad \dot{\alpha}_1 = x_4, \quad \alpha_2 = x_5, \quad \dot{\alpha}_2 = x_6, \quad (2.1)$$

$$u'_0 = u_1, \quad \frac{1}{1-h} u'_1 = u_2, \quad \frac{1}{1-h} u'_2 = u_3, \quad v'_0 = v_1, \quad \frac{1}{1-h_2} v'_1 = v_2, \quad \frac{1}{1-h} v'_2 = v_3.$$

Тогда система (1.6) приводится к виду

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad (2.2)$$

где $x^T = (x_1, \dots, x_6)$, $u^T = (u_1, u_2, u_3)$, $v^T = (v_1, v_2, v_3)$, а матрицы A и $B = -C$ имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Пусть функционал $J[u, v]$ задан в следующем виде:

$$J[u, v] = \int_0^T \left(\|x\|^2 + \|u\|_R^2 - \gamma^2 \|v\|_H^2 \right) dt, \quad (2.4)$$

где $\|x\|$ есть евклидова норма вектора $x \in R^6$, $\|u\|_R^2 = u^T R u$, $\|v\|_H^2 = v^T H v$, а (3×3) -матрицы R, H определено положительно.

В соответствии с поставленной задачей требуется определить оптимальные стратегии $u^0(t, x)$ и $v^0(t, x)$, которые доставляют минимакс и максимин функционалу (2.4) соответственно. Как известно [6, 7], решение поставленной задачи имеет следующий вид:

$$u^0(t, x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial W_\gamma}{\partial x}, \quad v^0(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} H^{-1} C^T \frac{\partial W_\gamma}{\partial x}, \quad (2.5)$$

где $W_\gamma(x)$ есть определено-положительное решение уравнения Беллмана-Айзека

$$\frac{\partial W_\gamma^T}{\partial x} A x + \frac{1}{4} \frac{\partial W_\gamma^T}{\partial x} \left(\frac{1}{2\gamma^2} C H^{-1} C^T - B R^{-1} B^T \right) \frac{\partial W_\gamma}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

с граничным условием $W_\gamma(T) = 0$. Решение уравнения (2.6) представляется в виде $W_\gamma(x) = x^T G x$, где симметричная матрица G удовлетворяет уравнению Риккати

$$A^T G + G A + G(\gamma^{-2} C H^{-1} C^T - B R^{-1} B^T) G = 0. \quad (2.7)$$

Матричное уравнение (2.7) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений со многими неизвестными, решение которой можно получить с применением вычислительной техники. Для аналитического исследования поставленной задачи можно рассмотреть управляемые движения отдельных составных частей манипулятора (основание, звенья) с соответствующими функционалами вида (2.4) [8].

Для основания манипулятора, уравнения движения которого имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = u_1 - v_1, \quad (2.8)$$

задача 1 ставится следующим образом: найти оптимальные стратегии $u^0(t, x)$ и $v^0(t, x)$, которые доставляют минимакс и максимин функционалу

$$J[u, v] = \int_0^T \left(x_1^2 + x_2^2 + u_1^2 - \gamma_1^2 v_1^2 \right) dt \quad (2.9)$$

соответственно. Решение этой игровой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_\gamma(x) &= \sqrt{1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + 1}}} x_1^2 + \frac{2\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + 1}} x_1 x_2 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + 1}}} x_2^2, \\ u^0(x_1, x_2) &= -\frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}} x_1 - \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + 1}}} x_2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$v^0(x_1, x_2) = -\frac{1}{\gamma_1 \sqrt{\gamma_1^2 - 1}} x_1 - \frac{1}{\gamma_1 \sqrt{\gamma_1^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + 1}}} x_2, \quad \gamma_1 > 1.$$

Задача 1 для управления движением звеньев манипулятора

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4, \dot{x}_4 = u_2 - hu_3 - v_2 + hv_3, \\ \dot{x}_5 &= x_6, \dot{x}_6 = -u_2 + u_3 + v_2 - v_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

исследуется аналогичным образом, где функционалом качества является

$$J[u, v] = \int_0^T (x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + u_2^2 + u_3^2 - \gamma_2^2 (v_2^2 + v_3^2)) dt. \quad (2.12)$$

Для системы (2.11), (2.12) уравнение (2.7) есть система десяти уравнений второго порядка с десятью неизвестными. Эту систему для конкретных параметров манипулятора можно исследовать с помощью вычислительной техники.

Вторую игровую задачу сформулируем следующим образом.

Задача 2. Пусть ограничения на управления u и v для системы (2.2) заданы в виде

$$u \in P, \quad v \in Q, \quad (2.13)$$

где P и Q компакты в R^3 . Задачей первого игрока является приведение в момент времени T манипулятора из заданного начального состояния $(t_0, x(t_0))$ в начало координат фазового пространства с помощью позиционного управления u , удовлетворяющего первому ограничению (2.13). Целью второго игрока является противостояние этому движению с помощью позиционного управления v , удовлетворяющего второму ограничению (2.13).

Определим целевое множество M_c следующим образом:

$$M_c = \{(t, x), t \geq t_0 = 0, x = 0\}. \quad (2.14)$$

Теперь задачей первого игрока является сближение позиции (t, x) к целевому множеству M_c к моменту $t = T$, а задачей второго – уклонение от M_c вплоть до момента $t = T$.

Исследование проведем для линейной модели манипулятора (2.2) методом экстремального прицеливания [4]. Согласно этому методу, нам нужно вычислить функцию

$$\varepsilon^0(t, x, T) = \max_{\|l\|=1} \chi(t, x, T, l) + c \quad (2.15)$$

для текущей позиции (t, x) . Здесь $\|l\|$ есть евклидова норма вектора $l \in R^6$, $c > 0$ – некоторая постоянная, а функция $\chi(t, x, T, l)$ имеет вид

$$\chi(t, x, T, l) = \rho_1(t, T, l) + \rho_2(t, T, l) + \rho_M(l) + l^T X[T, t]x, \quad (2.16)$$

где величины $\rho_1(t, T, l)$, $\rho_2(t, T, l)$, $\rho_M(l)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \rho_1(t, T, l) &= \int_t^T \min_{u \in P} (l^T X[T, \tau] B u) d\tau, \quad \rho_2(t, T, l) = \int_t^T \max_{v \in Q} (l^T X[T, \tau] C v) d\tau, \\ \rho_M(l) &= \min_{-q \in M_c(g)} l^T q = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

а $X[T, t]$ есть фундаментальная матрица системы (2.2). Как доказано в [4], если множества P и Q подобны, т.е. $P = rQ$ ($r > 1$), тогда $\rho_1(t, T, l) = -r\rho_2(t, T, l)$, и ситуация в данной задаче является регулярной. Это означает, что задача на максимум (2.15) имеет единственное решение $\{l^0(t, x, T) = (l_i^0(t, x, T), i = 1, \dots, 6), \varepsilon^0(t, x, T)\}$.

Пусть множества P и Q имеют следующий вид:

$$P = \{u, \|u\| = \lambda\}, \quad Q = \{v, \|v\| = \mu\}, \quad \lambda > \mu, \quad (2.18)$$

где $\|u\|, \|v\|$ — евклидовы нормы векторов u, v соответственно. Вычислив величину $\rho_1(t, T, l)$ согласно (2.17), получим

$$\begin{aligned} \rho_1(t, T, l) = & \int_t^T \min_{u \in P} [l_1(T-\tau)u_1 + l_2u_1 + l_3(u_2 - hu_3)(T-\tau) + l_4(u_2 - hu_3) + l_5(u_3 - u_2) \times \\ & \times (T-\tau) + l_6(u_3 - u_2)] d\tau = -\frac{\lambda}{2} \left[\left(T-t + \frac{b}{a} \right) \sqrt{a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d} - \frac{b}{a} \sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(d - \frac{b^2}{a} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\ln \left(\sqrt{a} \left(T-t + \frac{b}{a} \right) + \sqrt{a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d} \right) - \ln \left(\frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{d} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a &= l_1^2 + (l_3 - l_5)^2 + (l_5 - hl_3)^2; b = l_1l_2 + (l_3 - l_5)(l_4 - l_6) + (l_5 - hl_3)(l_6 - hl_4), \\ d &= l_2^2 + (l_4 - l_6)^2 + (l_6 - hl_4)^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

С учетом (2.16), (2.17) и (2.18) гипотетическое рассогласование для экстремальной задачи (2.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t, x, T) = & \max_{|l|=1} \left[l' X[T, t]x + \frac{1}{2}(\mu - \lambda) \left[\left(T-t + \frac{b}{a} \right) \sqrt{a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d} - \frac{b}{a} \sqrt{d} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(d - \frac{b^2}{a} \right) \left[\ln \left(\sqrt{a} \left(T-t + \frac{b}{a} \right) + \sqrt{a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d} \right) - \ln \left(\frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{d} \right) \right] \right] \right] + c. \end{aligned} \quad (2.21)$$

После решения экстремальной задачи (2.21) стратегию $u_c^0(t, x)$ первого игрока в задаче сближения определяем из следующей задачи на минимум:

$$l^{0T}(t, x, T)X[T, t]Bu_c^0(t, x) = \min_{u \in P} l^{0T}(t, T, x)X[T, t]Bu \quad (2.22)$$

в тех позициях (t, x) , где выполняется условие $\varepsilon^0(t, x, T) > c$. В остальных $u_c^0(t, x)$ есть любой вектор. Решая задачу (2.22) методом Лагранжа, получим

$$\begin{aligned} u_{1c}^0(t, x) &= -\lambda[l_1^0(t, T, x)(T-t) + l_2^0(t, T, x)](a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d)^{-\frac{1}{2}}, \\ u_{2c}^0(t, x) &= -\lambda[(l_3^0(t, T, x) - l_5^0(t, T, x))(T-t) + l_4^0(t, T, x) - l_6^0(t, T, x)](a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d)^{-\frac{1}{2}}, \\ u_{3c}^0(t, x) &= -\lambda[(l_5^0(t, T, x) - hl_3^0(t, T, x))(T-t) + l_6^0(t, T, x) - hl_4^0(t, T, x)](a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где величины a, b, d вычисляются из (2.20) при $l = l^0(t, x, T)$. Заметим, что здесь $T \leq T^0(t_0, x_0)$, где $T^0(t_0, x_0)$ есть наименьший корень уравнения $\varepsilon^0(t_0, x_0, T) = c$.

Для определения гарантированной стратегии $v_c^0(t, x)$ второго игрока в задаче уклонения нам предстоит вычислить вектор прицеливания $s(t, x)$, согласно равенству [4]

$$s(t, x, T) = \int_t^T (\varepsilon^0(t, x, \tau) - c)^{-2} X^T[\tau, t] l^0(t, x, \tau) d\tau \quad (T < T_0(t_0, x_0)),$$

где $\varepsilon^0(t, x, \tau)$ есть значение максимума (2.21) при $T = \tau$. Теперь стратегию $v_c^0(t, x)$ можем определить из следующей задачи на максимум:

$$s^T(t, x, T) C v_c^0(t, x) = \max_{v \in Q} s^T(t, x, T) C v \quad (2.24)$$

для всех позиций $(t, x) \in G$, где $G = \{(t, x) : \varepsilon^0(t, x, T) > c, 0 \leq t < T\}$.

Решая задачу (2.24) методом Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} v_{1c}^0(t, x) &= \mu s_2(t, T, x) H^{-1}(t, x, T); v_{2c}^0(t, x) = \mu (s_4(t, T, x) - s_6(t, T, x)) H^{-1}(t, x, T), \\ v_{3c}^0(t, x) &= \mu (s_6(t, T, x) - h s_4(t, T, x)) H^{-1}(t, x, T), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где через $H(t, x, T)$ обозначена величина

$$H(t, x, T) = [s_2^2(t, x, T) + (s_4(t, x, T) - s_6(t, x, T))^2 + (s_6(t, x, T) - h s_4(t, x, T))^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, в случае ограничений (2.13), (2.18) поставленная игровая задача решается до конца, если удастся определить вектор прицеливания $l^0(t, x, \tau)$ и функцию $\varepsilon^0(t, x, \tau)$ из экстремальной задачи (2.21).

Перейдем к исследованию игровых задач 2, уравнения которых имеют вид (2.11) с ограничениями на управления

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= (u_2, u_3) \in P_2 = [(u_2, u_3), u_2^2 + u_3^2 \leq \lambda_2^2], \\ v^{(2)} &= (v_2, v_3) \in Q_2 = [(v_2, v_3), v_2^2 + v_3^2 \leq \mu_2^2] \end{aligned} \quad (2.26)$$

и с целевым множеством

$$M_c = \{(t, x), t \geq 0, x = (x_3, x_4, x_5, x_6) = 0\}. \quad (2.27)$$

Для этой игровой задачи величина $\rho_1(t, T, l)$ опять имеет вид (2.19), где величины a, b, d определяются уже выражениями

$$\begin{aligned} a &= (l_3 - l_5)^2 + (l_5 - h l_3)^2; b = (l_3 - l_5)(l_4 - l_6) + (l_5 - h l_3)(l_6 - h l_4), \\ d &= (l_4 - l_6)^2 + (l_6 - h l_4)^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для функции $\varepsilon_2^0(t, x, T)$ в этой игре получаем экстремальную задачу, аналогичную с (2.21), с величинами (2.28) и нормой $\|l\|_2 = (l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 + l_6^2)^{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим теперь игровую задачу 2 для системы (2.11), (2.26)–(2.27), когда множества P, Q имеют вид

$$P_2 = [(u_2, u_3), |u_2| \leq \gamma_1, |u_3| \leq \gamma_2],$$

$$Q_2 = [(v_2, v_3), |v_2| \leq \delta_1, |v_3| \leq \delta_2], \quad \frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2} = r > 1. \quad (2.29)$$

Здесь для определения функции $\varepsilon_2^0(t, x, T)$ и вектора прицеливания $l^{(2)0}(t, x, T)$ имеем следующую экстремальную задачу:

$$\varepsilon_2^0(t, x, T) = \max_{\|l^{(2)}\|=1} [l_3(x_3 + (T-t)x_4) + l_4x_4 + l_5(x_5 + (T-t)x_6) + l_6x_6 + (1 - \frac{1}{r})\rho_1(t, T, l)] + c, \quad (2.30)$$

где функция $\rho_1(t, T, l)$ имеет вид

$$\rho_1(t, T, l) = \int_t^T (-\gamma_1 |l_3 - a_2 l_5| \tau + l_4 - a_2 l_6 - \gamma_2 |(l_5 - a_1 l_3) \tau + l_6 - a_1 l_4|) d\tau. \quad (2.31)$$

Для вычисления интеграла (2.31) определим следующие области в четырехмерном пространстве $R^4(l_3, l_4, l_5, l_6)$:

$$\begin{aligned} D_1^{(1)} &= \{l_3 - l_5 \geq 0, l_4 - l_6 \geq 0\} \cup \{l_3 - l_5 < 0, l_4 - l_6 \geq (t-T)(l_3 - l_5)\}, \\ D_2^{(1)} &= \{l_3 - l_5 < 0, l_4 - l_6 < 0\} \cup \{l_3 - l_5 > 0, l_4 - l_6 \leq (t-T)(l_3 - l_5)\}, \\ D_3^{(1)} &= \{l_3 - l_5 > 0, (t-T)(l_3 - l_5) < l_4 - l_6 < 0\}, \\ D_4^{(1)} &= \{l_3 - l_5 < 0, (t-T)(l_3 - l_5) > l_4 - l_6 > 0\}, \\ D_1^{(2)} &= \{l_5 - hl_3 \geq 0, l_6 - hl_4 \geq 0\} \cup \{l_5 - hl_3 < 0, l_6 - hl_4 \geq (t-T)(l_5 - hl_3)\}, \\ D_2^{(2)} &= \{l_5 - hl_3 < 0, l_6 - hl_4 < 0\} \cup \{l_5 - hl_3 > 0, l_6 - hl_4 \leq (t-T)(l_5 - hl_3)\}, \\ D_3^{(2)} &= \{l_5 - hl_3 > 0, (t-T)(l_5 - hl_3) < l_6 - hl_4 < 0\}, \\ D_4^{(2)} &= \{l_5 - hl_3 < 0, (t-T)(l_5 - hl_3) > l_6 - hl_4 > 0\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Интеграл (2.31) вычисляется для различных областей $D_i^{(j)} (i=1, \dots, 4; j=1, 2)$ и получаются следующие значения:

$$\rho_1(t, T, l) = -\frac{\gamma_1}{2} \varphi_1(t, T, l) - \frac{\gamma_2}{2} \varphi_2(t, T, l), \quad (2.33)$$

где функции $\varphi_1(t, T, l)$ и $\varphi_2(t, T, l)$ следующие:

$$\varphi_1(t, T, l) = \begin{cases} (l_3 - l_5)(T-t)^2 + 2(T-t)(l_4 - l_6), & l^{(2)} \in D_1^{(1)}, \\ -[(l_3 - l_5)(T-t)^2 + 2(T-t)(l_4 - l_6)], & l^{(2)} \in D_2^{(1)}, \\ (l_3 - l_5)(T-t)^2 + 2(T-t)(l_4 - l_6) + 2(l_4 - l_6)^2(l_3 - l_5)^{-1}, & l^{(2)} \in D_3^{(1)}, \\ -[(l_3 - l_5)(T-t)^2 + 2(T-t)(l_4 - l_6) + 2(l_4 - l_6)^2(l_3 - l_5)^{-1}], & l^{(2)} \in D_4^{(1)}. \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\varphi_2(t, T, l) = \begin{cases} (l_5 - hl_3)(T-t)^2 + 2(T-t)(l_6 - hl_4), & l^{(2)} \in D_1^{(2)}, \\ -[(l_5 - hl_3)(T-t)^2 + 2(T-t)(l_6 - hl_4)], & l^{(2)} \in D_2^{(2)}, \\ (l_5 - hl_3)(T-t)^2 + 2(T-t)(l_6 - hl_4) + 2(l_6 - hl_4)^2(l_5 - hl_3)^{-1}, & l^{(2)} \in D_3^{(2)}, \\ -[(l_5 - hl_3)(T-t)^2 + 2(T-t)(l_6 - hl_4) + 2(l_6 - hl_4)^2(l_5 - hl_3)^{-1}], & l^{(2)} \in D_4^{(2)}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Таким образом, исследование экстремальной задачи (2.30) с учетом (2.31)–(2.35) можно довести до конца и в явном виде определить функцию $\varepsilon_2^0(t, x, T)$ и вектор прицеливания

$$l^{(2)0}(t, x, T) = (l_3^0(t, x, T), l_4^0(t, x, T), l_5^0(t, x, T), l_6^0(t, x, T)).$$

Оптимальная стратегия $u_c^{(2)0}(t, x)$ определяется из экстремальной задачи

$$l^{(2)0T}(t, x, T)X^{(2)}[T, t]B^{(2)}u_c^{(2)0}(t, x) = \min_{u^{(2)} \in P_2} l^{(2)0T}(t, T, x)X^{(2)}[T, t]B^{(2)}u^{(2)} \quad (2.36)$$

с ограничениями (2.29)

$$\begin{aligned} u_{2c}^0(t, x) &= -\gamma_1 \text{sign}[(l_3^0(t, x, T) - l_5^0(t, x, T))(T - t) + l_4^0(t, x, T) - l_6^0(t, x, T)], \\ u_{3c}^0(t, x) &= -\gamma_2 \text{sign}[(l_5^0(t, x, T) - hl_3^0(t, x, T))(T - t) + l_6^0(t, x, T) - hl_4^0(t, x, T)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

в тех позициях (t, x) , где $\varepsilon_2^0(t, x, T) > c$. В остальных случаях стратегия $u_c^{(2)0}(t, x)$ есть любой вектор $u_2 \in P_2$.

Гарантированную стратегию $v_c^{(2)0}(t, x)$ определяем из задачи на максимум

$$s^{(2)T}(t, x, T)C^{(2)}v_c^{(2)0}(t, x) = \max_{v^{(2)} \in Q_2} s^{(2)T}(t, T, x)C^{(2)}v^{(2)} \quad (2.38)$$

в тех позициях (t, x) , где $\varepsilon_2^0(t, x, T) > c$, а вектор прицеливания $s^{(2)}(t, x, T) = (s_3(t, x, T), s_4(t, x, T), s_5(t, x, T), s_6(t, x, T))$ определяется выражением

$$s^{(2)}(t, x, T) = \int_t^T (\varepsilon_2^0(t, x, \tau) - c)^{-2} X^{(2)T} l^{(2)0}(t, x, \tau) d\tau \quad (T < T_0(t_0, x_0)). \quad (2.39)$$

Решая задачу (2.38), получаем гарантированную стратегию второго игрока:

$$v_{2c}^0(t, x) = \delta_1 \text{sign}[s_6(t, x, T) - s_4(t, x, T)]; v_{3c}^0(t, x) = \delta_2 \text{sign}[hs_4(t, x, T) - s_6(t, x, T)]. \quad (2.40)$$

Таким образом, определяются оптимальные $u_c^{(2)0}(t, x)$ и гарантированные $v_c^{(2)0}(t, x)$ стратегии для управления движением звеньев манипулятора в случае ограничений (2.29).

3. Управление квазилинейной моделью. Обратимся теперь к исследованию игровых задач управления квазилинейной моделью манипулятора, которая описывается системой (1.6). Подставляя уже полученные оптимальные $u^0(t, x)$ и гарантированные $v^0(t, x)$ стратегии в линейную систему (2.2), получим оптимальные фазовые траектории $x^0(t)$ для линейной модели. Так как нелинейные члены $f_i(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ в системе (1.6) имеют порядок ε , где ε – малая величина, а сами функции $f_i(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ имеют порядок единицы, то нетрудно показать, что подстановка оптимальных стратегий $u^0(t, x)$ и $v^0(t, x)$ линейной системы в нелинейную (1.6) приводит к решению $\dot{x}^*(t)$, которое отличается от решения линейной системы $x^0(t)$ величиной порядка ε . Этот факт дает нам возможность потребовать от квазилинейной системы

(1.6) иметь то решение $x^0(t)$, которое оптимально для линейной (2.2). При этом следует систему управления квазилинейной моделью снабдить регулятором, который будет вырабатывать дополнительные управляющие воздействия $u_\varepsilon(t, x)$, компенсирующие разность $x^*(t) - x^0(t)$. Для определенности такой регулятор можно сконструировать для первого игрока. На рис. 2 приведена кибернетическая схема управления квазилинейной моделью манипулятора.

Таким образом, выбирая стратегии игроков в виде

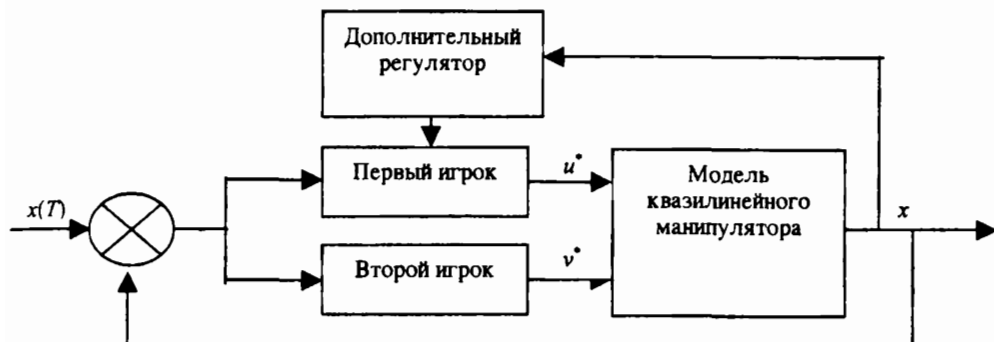


Рис. 2.

$u^*(t, x) = u^0(t, x) + u_\varepsilon(t, x)$ и $v^*(t, x) = v^0(t, x)$, для квазилинейной модели получим то же самое движение $x^0(t)$, что и для линейной. Здесь $u_\varepsilon(t, x) = \varepsilon f(x^0, \dot{x}^0)$, где $f(x^0, \dot{x}^0)$ вычисляется, согласно (1.3)–(1.6), (2.2). Однако при этом оптимальное значение функционала (2.4) $J^0[u^0, v^0]$ получит следующее приращение:

$$\Delta J[u^*, v^*] = J[u^*, v^*] - J^0[u^0, v^0] = \int_0^T \left(2\varepsilon u^{0T} R f(x^0, \dot{x}^0) + \varepsilon^2 \|f(x^0, \dot{x}^0)\|_R^2 \right) dt. \quad (3.1)$$

Как видно из (3.1), приращение $\Delta J[u^*, v^*]$ имеет порядок ε . Для данной модели манипулятора с разделением движений его составных частей (основания, звеньев) дополнительный регулятор конструируется только для управления движением звеньев.

При решении игровых задач 2 для нелинейной модели (1.6) ограничения (2.13), (2.18) изменяются следующим образом:

$$\|u^*(t)\| = \|u^0(t) + u_\varepsilon(t)\| \leq \|u^0(t)\| + \|u_\varepsilon(t)\| \leq \lambda + \varepsilon \|f(x^0, \dot{x}^0)\|. \quad (3.2)$$

Следовательно, если первоначальные ограничения на управляющие воздействия заданы для квазилинейной модели манипулятора (1.6), то при решении линейных игровых задач 2 следует область управляющих воздействий сузить на величину εf_0 , где $\|f(x, \dot{x})\| \leq f_0$.

Таким образом, вышеизложенный подход позволяет существенно облегчить процедуру решения игровых задач для квазилинейной модели

манипулятора с проигрышем в оптимальном значении функционала (2.4) или в использовании возможностей игроков. Этот проигрыш имеет порядок ε в обоих случаях.

Кафедра механики

Поступила 02.04.2002

ЛИТЕРАТУРА

1. Промышленные роботы. Справочник. М.: Машиноведение, 1983.
2. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989.
3. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. – Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1986.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры М.: Наука, 1974.
5. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.
6. Bellman R.E. Dynamic programming. Princeton NJ, Princeton University press, 1957.
7. Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes. New York, Academic Press, 1967, v. 1, 1971, v. 2.
8. Гукасян А.А., Степанян В.К. – Изв. НАН РА, Механика, 2000, № 4.

Ա.Ա. ԳՈՒԿԱՍՅԱՆ, Վ.Զ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

ԵՐԿՕՂԱԿ ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ԴԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ԽԱՂԱՅԻՆ ՄՈՏԵՑՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է երեք ազատության աստիճան ունեցող երկօղակ մանիպուլյատորի ղեկավարման մոտեցման և շեղման խաղային խնդիրներ՝ տրված նպատակային բազմության ու ղեկավարող ազդեցությունների վրա դրված տարբեր սահմանափակումների դեպքում: Առաջարկվում է գծային մոդելի համար ստացված ղեկավարող ազդեցությունները օգտագործել քվադրատային մոդելում լրացուցիչ կարգավորիչի միջոցով:

A.A. GHUKASYAN, V.K. STEPANYAN

THE GAME APPROACH TO CONTROL OF DOUBLE LINKED MANIPULATOR

Summary

For the double linked manipulator with three degrees of mobility game problems of approach–evasion with the given target set are investigated at different restrictions on controlling influences and on a minimax square-law functional. The received optimal decisions for linear model are used for control of nonlinear model with the help of an additional regulator.