ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2003 Естественные науки

Механика

УДК 62.50

В.Р. БАРСЕГЯН, Т.А. СИМОНЯН

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ В ОДНОРОДНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Рассматривается дифференциальная игра сближения–уклонения при нескольких целевых множествах в классе стохастических частично программных стратегий в однородном центральном поле, когда она протекает в тонких сферических слоях. Стратегии игроков формируются с учетом случайных величин, появляющихся в ходе измерений позиции. Построены стратегии первого и второго игроков в явном виде. Получена оценка величины расстояния истинного фазового состояния системы от поводыря в любой момент времени.

1. Рассмотрим процесс преследования летательных аппаратов, условно называемых перехватчиком и целью. Считая их материальными точками, пренебрегаем возмущениями, исходящими от несферичности Земли, атмосферными сопротивлениями и притяжением других небесных тел. Предполагая также, что преследование протекает в тонких сферических слоях гравитационного поля Земли [1], и считая, что двигатели управления работают непрерывно, векторные уравнения движения аппаратов запишем так:

$$\ddot{\bar r}_1+\omega^2\bar r_1=\bar u, \qquad \ddot{\bar r}_2+\omega^2\bar r_2=\bar v, \tag{1.1}$$

где $\bar r_1$ и $\bar r_2$ – геоцентрические радиусы-векторы перехватчика и цели; $\bar u$ и $\bar v$ – равнодействующие векторы ускорения от тяги их двигателей; $\omega^2=\dfrac{\mu_0}{r_0^3}$; $r_0=const$ – средний радиус сферического слоя; μ_0 – гравитационная постоянная Земли.

Вычитая из первого уравнения (1.1) второе и определяя вектор дальности от цели до перехватчика $\bar r=\bar r_1-\bar r_2$, получим

$$\ddot{\bar r}+\omega^2\bar r=\bar u-\bar v. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) в нормальной форме запишется в виде

$$\dot x=Ax+Bu+Cv, \tag{1.3}$$

где $x=(x_1,x_2,\dots,x_6)'$, $x_1=x$, $x_2=\dot x$, $x_3=y$, $x_4=\dot y$, $x_5=z$, $x_6=\dot z$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Управления $u = (u_1, u_2, u_3)'$ и $v = (v_1, v_2, v_3)'$ удовлетворяют ограничениям

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \le \lambda_1^2, \qquad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \le \lambda_2^2. \tag{1.4}$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование.

2. Пусть заданы моменты времени: $t_0 = \vartheta_0 \le \vartheta_1 \le \ldots \le \vartheta_m = \theta$.

Рассмотрим дифференциальную игру сближения–уклонения системы (1.3) в моменты времени ϑ_k $(k = 1, \ldots, m)$ при множествах

$$M_k : \sum_{i=1}^{6} x_i^2 [\vartheta_k] \le a_k^2 \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{2.1}$$

когда управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ соответственно первым (перехватчиком) и вторым (целью) игроками выбираются из класса стохастических частично программных управлений на интервале времени $[t_0, \theta]$ [2–5].

Основываясь на работы [4, 5], стохастические частично программные управления игроков как измеримые по $t, \widetilde{\omega}$ и неупреждающие функции на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ запишем в виде

$$u_i\Big(t, \widetilde{\omega}, x[\tau_i]\Big) = u_i\big(t, \xi_1, \ldots, \xi_i, x[\tau_i]\big), \tag{2.2}$$

$$v_i\Big(t, \widetilde{\omega}, x[\tau_i]\Big) = v_i\big(t, \xi_1, \ldots, \xi_i, x[\tau_i]\big) \tag{2.3}$$

при $\tau_i \le t \le \tau_{i+1}$, где $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{i_m}$ являются узлами разбиения интервала времени $[t_0, \theta]$ с диаметром $\delta = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$ таким, что моменты времени ϑ_k $(k = 1, \ldots, m)$ являются узлами разбиения, т.е.

$$\tau_{i_0} = t_0 = \vartheta_0, \quad \tau_{i_1} = \vartheta_1, \ldots, \tau_{i_m} = \vartheta_m = \theta.$$

Случайное движение системы (1.3) определяется как решение стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax + Bu_i\big(t, \xi_1, \ldots, \xi_i, x[\tau_i]\big) + Cv_i\big(t, \xi_1, \ldots, \xi_i, x[\tau_i]\big)$$

при частично программных управлениях $u_i(\cdot), v_i(\cdot)$ и начальной позиции $(\tau_i, x[\tau_i])$, т.е.

$$x(t, \xi_1, \ldots, \xi_{i+1}) = X[t, \tau_i]x[\tau_i] + \int_{\tau_i}^{t} X[t, \tau]\big(Bu(\tau, \cdot) + Cv(\tau, \cdot)\big)d\tau \tag{2.4}$$

при $\tau_i \le t \le \tau_{i+1}$. Здесь $X[t, \tau]$ – фундаментальная матрица решений однородной части системы (1.3).

Сформулируем следующие задачи.

Задача 1. Первый игрок стремится выбором своей стратегии (2.2) сблизить стохастическое движение (2.4) системы (1.3) к множествам M_k $(k=1,...,m)$ не позже, чем к моментам времени ϑ_k $(k=1,...,m)$.

Задача 2. Второй игрок стремится выбором своей стратегии (2.3) уклонить стохастическое движение (2.4) системы (1.3) от всех множеств M_k $(k=1,...,m)$ до моментов времени ϑ_k $(k=1,...,m)$.

3. Наряду со стохастическим движением (2.4) исходной системы (1.3) рассмотрим детерминированное движение точки (поводырь) $w(t)$, которое формируется так, чтобы в процессе игры они взаимно отслеживались [2–7].

Динамика поводыря определяется уравнением

$$\dot{w}=A(t)w+B(t)u+C(t)v. \qquad (3.1)$$

Пусть выполнены следующие условия [7].

Условие 1. При всех $t\in[t_0,\tau_i)$ и $\tau_i\in[t_0,\vartheta_k]$ функции

$$\aleph_k(t,\vartheta_k,l_k)=-\left\{\int_t^{\eta_k}\min_{u_1^2+u_2^2+u_3^2\le\lambda_1^2}[l_k'X[\vartheta_k,\tau]B(\tau)u]d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^{\eta_k}\max_{v_1^2+v_2^2+v_3^2\le\lambda_2^2}[l_k'X[\vartheta_k,\tau]C(\tau)v]d\tau+\min_{-p\in M_k}l_k'p\right\} \qquad (3.2)$$

выпуклы по l_k, $k=1,...,m$ (числа η_k определим ниже).

Условие 2. Для всякого вектора u найдется вектор v из (1.4) такой, что для всех t $(t_0\le t\le\vartheta_m)$ и для всех векторов l_k будет справедливо неравенство

$$l_k'(B(t)u+C(t)v)\ge\min_{u_1^2+u_2^2+u_3^2\le\lambda_1^2}l_k'B(t)u+\max_{v_1^2+v_2^2+v_3^2\le\lambda_2^2}l_k'C(t)v. \qquad (3.3)$$

Построим функцию Ляпунова [8]:

$$\lambda_k(t,w)=\sum_{k=1}^{m}\int_t^{\vartheta_k-\mu}\frac{d\tau}{\varepsilon_k^{(0)}(t,w,\tau)}\quad(\vartheta_{k-1}-\mu\le t\le\vartheta_k-\mu,\quad\vartheta_0=t_0). \qquad (3.4)$$

Числа η_k являются решением (3.4). Здесь функции $\varepsilon_k^{(0)}(t,w,\tau)$ определяются выражением

$$\varepsilon_k^{(0)}(t,w,\vartheta_k)=\max_{\|l_k\|\le1}[l_k'X[\vartheta_k,t]w-\aleph_k(t,\vartheta_k,l_k)]. \qquad (3.5)$$

Единственность вектора $l_k^{(0)}$, максимизирующего (3.5), следует из условия 2, где $\mu>0$ сколь угодно малое число.

Стратегии второго игрока, обеспечивающие уклонение каждого движения $w(t)$ от множеств $\{M_k\}$ до моментов времени $\vartheta_1,...,\vartheta_k$, определяется из условия

$$\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_t^{\vartheta_k-\mu}\frac{d\tau}{\left[\varepsilon_k^{(0)}(t,w,\tau)\right]^2}l_k^{(0)'}X[\tau,t]\right\}C(t)v_e[t,w]=\max_{v_1^2+v_2^2+v_3^2\le\lambda_2^2}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_t^{\vartheta_k-\mu}\frac{d\tau}{\left[\varepsilon_k^{(0)}(t,w,\tau)\right]^2}l_k^{(0)'}X[\tau,t]\right\}C(t)v \qquad (3.6)$$

$$(\vartheta_{k-1}-\mu\le t\le\vartheta_k-\mu;\quad k=1,...,m).$$

Стратегии первого игрока, обеспечивающие сближение всех движений $w(t)$ к множествам M_k $(k=1,...,m)$ не позже, чем к моментам времени ϑ_k $(k=1,...,m)$ при $\varepsilon_k^{(0)}(t_*,x_*,x_1,...,x_{k-1},\{\vartheta_k\})>C_1$, определяется из условия

$$\sum_{k=1}^{m} l_k' X[\vartheta_k,t]B(t)u_e=\min_{u_1^2+u_2^2+u_3^2\le\lambda_1^2}\sum_{k=1}^{m} l_k' X[\vartheta_k,t]B(t)u. \tag{3.7}$$

Ясно, что целью второго игрока является прицеливание стохастического движения (2.4) на построенный поводырь. Такая стратегия второго игрока обеспечит гарантированный результат при самом упорном сопротивлении первого.

Предполагая, что $l_{k2}=l_{k4}=l_{k6}=0$ $(k=1,...,m)$, гипотетическое рассогласование будет таким:

$$\varepsilon_k^{(0)}(t,w,\vartheta_k)=\left[A_{k1}^2(t,w,\vartheta_k)+A_{k3}^2(t,w,\vartheta_k)+A_{k5}^2(t,w,\vartheta_k)\right]^{\frac{1}{2}}+(\lambda_2-\lambda_1)h_k(t,\vartheta_k)-a_k, \tag{3.8}$$

где

$$A_{k,2i-1}(t,w,\vartheta_k)=w_{2i-1}(t)\cos\omega(\vartheta_k-t)+w_{2i}(t)\frac{1}{\omega}\sin\omega(\vartheta_k-t)\quad (i=1,2,3),$$

$$h_k(t,\vartheta_k)=\frac{1}{\omega}\int_t^{\vartheta_k}\left|\sin\omega(\vartheta_k-\tau)\right|d\tau .$$

При минимизации $\varepsilon_k^{(0)}(t,w,\vartheta_k)$ по ϑ_k получаем те моменты времени ϑ_k, при которых первый игрок впервые стремится приблизить движение системы к множествам M_k, а второй – уклонить.

Согласно (3.6) и (3.7), стратегии первого и второго игроков, разрешающие задачу 1 и задачу 2, соответственно будут

$$u_{ke}(t,w,\vartheta_1,...,\vartheta_m)=\frac{\lambda_1 B_k(\cdot)}{\sqrt{B_1^2(\cdot)+B_2^2(\cdot)+B_3^2(\cdot)}}, \tag{3.9}$$

$$v_{ke}(t,w,\vartheta_1,...,\vartheta_m)=\frac{\lambda_1 C_k(\cdot)}{\sqrt{C_1^2(\cdot)+C_2^2(\cdot)+C_3^2(\cdot)}}, \tag{3.10}$$

где

$$B_i(t,w,\vartheta_1,...,\vartheta_m)=\sum_{k=1}^{m} b_i(t,w,\vartheta_k)\sin\omega(\vartheta_k-t),$$

$$C_i(t,w,\vartheta_1,...,\vartheta_m)=\sum_{k=1}^{m}\int_t^{\vartheta_k}\frac{b_i(t,w,\vartheta_k)\sin\omega(\tau-t)}{\left[\varepsilon_k^{(0)}(t,w,\tau)\right]^2}d\tau,$$

$$b_i(t,w,\vartheta_k)=\frac{1}{\omega}\frac{A_{k,2i-1}(t,w,\vartheta_k)}{\sqrt{A_{k1}^2(\cdot)+A_{k3}^2(\cdot)+A_{k5}^2(\cdot)}}\quad (i=1,2,3).$$

Подставляя полученные выражения для первого и второго игроков (3.9) и (3.10) в уравнение движения поводыря, которое соответствует (1.3) и имеет вид (3.1), и интегрируя их при соответствующих начальных условиях, будем иметь движение точки поводыря $w(t)$.

Получена оценка, позволяющая определить величину расстояния фазового состояния системы от поводыря в любой момент времени:

$$\rho^2\left(t_* + \sum_{i=1}^{k+1}\delta_i\right) \le \rho^2(t_*)e^{2\nu\sum_{i=1}^{k+1}\delta_i} + \frac{1}{2\nu}\left[\varphi(\delta_1)+cd\varepsilon_1\right]\left(e^{2\nu\sum_{i=1}^{k+1}\delta_i} - e^{2\nu\sum_{i=2}^{k+1}\delta_i}\right) +$$
$$+\frac{1}{2\nu}\sum_{j=2}^{k+1}\left[\varphi(\delta_j)+cd\varepsilon_j\right]\left(e^{2\nu\sum_{i=j}^{k+1}\delta_i}-1\right), \qquad (3.11)$$

где $\rho(t)$ – евклидова норма вектора $w(t)-x[t]$, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$,

$$\left\|\hat{x}\left(t_* + \sum_{i=1}^{j-1}\delta_i\right) - x\left(t_* + \sum_{i=1}^{j-1}\delta_i\right)\right\| \le \varepsilon_j,\ \varepsilon_j > 0,\ \varphi(\delta_j)\to 0 \text{ при } \delta_j \to 0,$$

$$c = \|C\| = \sqrt{3}, \qquad \nu = \|A\| = \sqrt{3(\omega^4+1)}, \qquad d = \max_{v_1,v_2\in Q}\rho(v_1,v_2) = \lambda_2 .$$

x_* есть истинное положение системы, а $\hat{x}_*$ – положение системы, измеренное с ошибкой.

Кафедра теоретической механики *Поступила 03.07.2002*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Граздовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.** Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. **Габриелян М.С., Барсегян В.Р.** – Ученые записки ЕГУ, 1994, № 2.
4. **Габриелян М.С., Барсегян В.Р., Симонян Т.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1996, № 1.
5. **Барсегян В.Р., Симонян Т.А.** – Изв. НАН РА, Механика, 2000, т. 53, № 4.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
7. **Габриелян М.С.** – Ученые записки ЕГУ, 1976, №3.

Վ.Ռ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Թ.Ա. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՄՈՏԵՑՄԱՆ ԵՎ ՇԵՂՄԱՆ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂ ՄԻ ՔԱՆԻ ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ՀԱՄԱՍԵՌ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկված է համասեռ կենտրոնական դաշտում մի քանի նպատակային բազմությունների դեպքում շեղման և մոտեցման դիֆերենցիալ խաղ ստոխաստիկ մասնակի ծրագրային ստրատեգիաների դասում, երբ խաղը ընթանում է նեղ սֆերիկ շերտերում: Խաղացողների ստրատեգիաները ձևավորվում են դիրքերի չափումների անճշտությունների հիման վրա: Կառուցված են առաջին և երկրորդ խաղացողների ստրատեգիաները բացահայտ տեսքով: Բերված է ուղղորդից համակարգի իրական ֆազային վիճակի շեղման գնահատականը ժամանակի ցանկացած պահի համար:

V.R. BARSEGHYAN, T.A. SIMONYAN

STOCHASTIC DIFFERENTIAL GAME OF RAPPROCHEMENT–DEVIATION FOR SEVERAL TARGET SETS IN HOMOGENEOUS CENTRAL FIELD

Summary

The differential game of rapprochement–deviation for several target sets is considered with the collection of stochastic and partially programmable strategies in the homogeneous central field, when the game takes place in thin spherical stratums. The strategies of players are formed on the basis of random variables that appear in the process of measurements of the position. The strategies of the first and second players are constructed in an exact form. The bound for the distance between the true phase state of the system and the guide is obtained for every time moment.