

Математика

УДК 519.6

Ա.Ր. ԽԱՇԱՏՐՅԱՆ, Ր.Ա. ԽԱՇԱՏՐՅԱՆ

О НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Вопрос непрерывности многозначных отображений имеет весьма важную роль в параметрических задачах оптимизации и теории дифференциальных включений. В статье рассматривается вопрос непрерывности некоторых многозначных отображений, которые задаются при помощи ограничений типа равенств и неравенств.

В работе задаются достаточные условия, при выполнении которых пересечение непрерывных многозначных отображений также будет непрерывным.

§ 1. Определения и обозначения. Напомним некоторые из них.

Пусть $M \subset R^n$ – выпуклое множество и $x_0 \in M$. Конусом касательных направлений для M в точке x_0 называется множество $K = \{v / v = \lambda(x - x_0); \lambda > 0; x \in M\}$. $K^\circ \equiv \{v^\circ / \langle v^\circ, u \rangle \geq 0, u \in K\}$ – сопряженный конус к конусу K , где $\langle v^\circ, u \rangle$ – скалярное произведение векторов $u, v^\circ \in R^n$, $f'(x_0, \bar{x})$ – производная по направлению $\bar{x}$ в точке x_0 ; $\partial f(x_0)$ – субдифференциал выпуклой непрерывной функции f в точке x_0 ; $Lin M$ – наименьшее подпространство, содержащее множество M .

Пусть X и Y – некоторые множества. Многозначным отображением (в дальнейшем м.о.) a из X в Y называется отображение, которое сопоставляет каждому $x \in X$ множество $a(x) \subseteq Y$. Графиком многозначного отображения a называется множество $graph(a) = \{(x, y) / y \in a(x)\}$. Обратное отображение a^{-1} м.о. a определяется как м.о. из Y в X по правилу $x \in a^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in a(x)$. М.о. a называется замкнутым в точке x_0 , если из того, что $x_j \rightarrow x_0, y_j \in a(x_j), y_j \rightarrow y_0$ следует $y_0 \in a(x_0)$.

Определение 1 [1]. Будем говорить, что a полунепрерывно сверху (сокращенно п.н. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности V нуля существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \subseteq a(x_0) + V, \forall x \in U(x_0)$.

Определение 2 [1]. Будем говорить, что a полунепрерывно снизу (сокращенно п.н. сн.) в точке x_0 , если для любого $y_0 \in a(x_0)$ и любой окрестности $V(y_0)$ точки y_0 существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset, \forall x \in U(x_0)$. М.о. называется непрерывным в x_0 , если оно одновременно п.н. св. и п.н. сн. в x_0 .

§ 2. О пересечении непрерывных многозначных отображений. Рассмотрим теперь многозначное отображение $a(\alpha) = \{x \in R^n / f_1(x) = \alpha, f_2(x) = \alpha\}$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – выпуклые непрерывные функции на R^n .

Пусть множества $M_1 \equiv \{x / f_1(x) \leq 0\}$ и $M_2 \equiv \{x / f_2(x) \leq 0\}$ компактны. Положим $M = \{x / f_1(x) = 0, f_2(x) = 0\}$.

Теорема 1. Пусть для любого $x \in M$ выполнены следующие предположения:

1) $0 \notin \partial f_1(x), 0 \notin \partial f_2(x)$; 2) $\text{Lin} \partial f_1(x) \cap \text{Lin} \partial f_2(x) = \{0\}$; 3) $\text{Lin} \partial f_1(x) + \text{Lin} \partial f_2(x) \neq R^n$. Тогда $a(\alpha) \neq \emptyset$ в некоторой окрестности нуля и м.о. a непрерывно в этой точке.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Так как $0 \notin \partial f_1(x_0)$, то существует вектор w_1 такой, что $f_1(x_0, w_1) < 0, \|w_1\| = 1$.

Известно [2], что существует функция $r(\bar{x}) = 0(\bar{x})$ такая, что $f_1(x_0 + \bar{x}) \leq f_1(x_0) + f_1'(x_0, \bar{x}) + r(\bar{x})$. Положим

$$H_1 = \{\bar{x} \in R^n / f_1'(x_0, \bar{x}) \leq 0, f_1'(x_0, -\bar{x}) \leq 0\}, \omega_1(\lambda) = \sup\{r_1(\bar{x}) : \|\bar{x}\| \leq \lambda\}.$$

Пусть $\bar{x} \in H_1, \gamma > 0$, тогда

$$\begin{aligned} f_1(x_0 + \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| w_1) - \alpha &\leq f_1(x_0) + f_1'(x_0, \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| w_1) + r_1(\bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| w_1) - \alpha \leq \\ &\leq \|\bar{x}\| f_1'(x_0, w_1) + \omega_1(\|\bar{x}\| (1 + \gamma \|w_1\|)) - \alpha = \|\bar{x}\| (f_1'(x_0, w_1) + \\ &+ \frac{\omega_1(\|\bar{x}\| (1 + \gamma \|w_1\|))}{\|\bar{x}\|}) - \alpha. \end{aligned}$$

Выберем $\delta_1 > 0$ настолько малым, чтобы выражение в круглых скобках было меньше, чем $\frac{1}{2} f_1'(x_0, w_1)$ при $\|\bar{x}\| \leq \delta_1$.

Пусть $\|\bar{x}_0\| \leq \frac{\delta_1}{2}$ и $\bar{x}_0 \neq 0$. Тогда существует некоторая окрестность

$(-\eta_1, \eta_1)$ нуля такая, что для любого $\bar{x} \in U(\bar{x}_0, \frac{\|\bar{x}_0\|}{2}) \cap H_1$ имеет место

$f_1(x_0 + \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| w_1) - \alpha < 0, \forall \alpha \in (-\eta_1, +\eta_1)$. Аналогично можно показать, что $f_1(x_0 + \bar{x} - \gamma \|\bar{x}\| w_1) - \alpha > 0$. Рассмотрим теперь функцию

$q(\alpha, \bar{x}, \mu) \equiv f_1(x_0 + \bar{x} + \mu \|\bar{x}\| w_1) - \alpha$. При фиксированных $\bar{x}, \alpha$ имеем $q(\alpha, \bar{x}, \gamma) < 0, q(\alpha, \bar{x}, -\gamma) > 0$. Следовательно, на отрезке $[-\gamma, +\gamma]$ существует точка $\mu_1(\bar{x}, \alpha)$ такая, что $q(\alpha, \bar{x}, \mu_1(\bar{x}, \alpha)) = 0$. Заметим, что

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{q(\alpha, \bar{x}, \mu + \Delta) - q(\alpha, \bar{x}, \mu)}{\Delta} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \left(\frac{f_1(x_0 + \bar{x} + (\mu + \Delta) \|\bar{x}\| w_1)}{\Delta} - \frac{f_1(x_0 + \bar{x} + \mu \|\bar{x}\| w_1)}{\Delta} \right) = f_1'(x_0 + \bar{x} + \mu \|\bar{x}\| w_1, w_1) \|\bar{x}\|.$$

Поэтому в силу полунепрерывности сверху $f_1'(x_0, w_1)$ в точке x_0 и по условию $f_1'(x_0, w_1) < 0$ имеем

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{q(\alpha, \bar{x}, \mu + \Delta) - q(\alpha, \bar{x}, \mu)}{\Delta} < 0 \quad (2.1)$$

при достаточно малых $\bar{x}$. Предположим, что условие (2.1) имеет место при $\|\bar{x}\| \leq \frac{\delta_1}{2}$, $\bar{x} \neq 0$. Отсюда следует, что при $\|\bar{x}\| \leq \frac{\delta_1}{2}$ функция $q(\alpha, \bar{x}, \cdot)$ монотонно убывает и поэтому $\mu_1(\bar{x}, \alpha)$ определяется однозначно и $|\mu_1(\bar{x}, \alpha)| \leq \gamma$, т.е. $\mu_1(\bar{x}, \alpha) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$. Покажем, что функция $\mu_1(\bar{x}, \alpha)$ непрерывна по $\bar{x}$. Допустим противное. Тогда существуют последовательности $\bar{y}_j, \bar{x}_j \in U\left(\bar{x}_0, \frac{\|\bar{x}_0\|}{2}\right) \cap H_1, \bar{y}_j \rightarrow \bar{x}_0, \bar{x}_j \rightarrow \bar{x}_0$, такие что

$$\mu_1(\bar{x}_j, \alpha) \rightarrow \bar{\omega}, \mu_1(\bar{y}_j, \alpha) \rightarrow \underline{\omega}, \text{ но } \bar{\omega} \neq \underline{\omega}.$$

Тогда имеем

$$f_1(x_0 + \bar{x}_j + \mu_1(\bar{x}_j, \alpha) \|\bar{x}_j\| w_1) = \alpha, \quad f_1(x_0 + \bar{y}_j + \mu_1(\bar{y}_j, \alpha) \|\bar{y}_j\| w_1) = \alpha.$$

Переходя к пределу, получим

$$f_1(x_0 + \bar{x}_0 + \bar{\omega} \|\bar{x}_0\| w_1) = \alpha; \quad f_1(x_0 + \bar{x}_0 + \underline{\omega} \|\bar{x}_0\| w_1) = \alpha.$$

Отсюда следует, что функция $\mu(x, \alpha)$ определена неоднозначно, что есть противоречие. Поэтому $\mu_1(\bar{x}, \alpha)$ непрерывна по переменной $\bar{x}$.

Положим $\psi_1(\bar{x}, \alpha) = x_0 + \bar{x} + r_1(\bar{x}, \alpha)$, где $r_1(\bar{x}, \alpha) = \mu_1(\bar{x}, \alpha) \|\bar{x}\| w_1$. Аналогично существует непрерывная по $\bar{x}$ функция $\mu_2(\bar{x}, \alpha)$ такая, что для произвольного

$$\bar{x} \in H_2 \equiv \{\bar{x} / f_2'(x_0, \bar{x}) \leq 0, f_2'(x_0, \bar{x}) \leq 0\}; \|\bar{x}\| \leq \frac{\delta_2}{2}, \bar{x} \neq 0,$$

существует некоторая окрестность нуля $(-\eta_2, +\eta_2)$, а

$$f_2(x_0 + \bar{x} + \mu_2(\bar{x}, \alpha) \|\bar{x}\| w_2) = \alpha \quad \text{при } \alpha \in (-\eta_2, +\eta_2), \text{ где } w_2 \text{ вектор такой, что } f_2'(x_0, w_2) < 0.$$

$$\text{Пусть } \psi_2(\bar{x}, \alpha) = x_0 + \bar{x} + r_2(\bar{x}, \alpha), \quad \text{где } r_2(\bar{x}, \alpha) = \mu_2(\bar{x}, \alpha) \|\bar{x}\| w_2.$$

Обозначим $\varepsilon = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}\}$ и $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Так как $\text{Lin} \partial f_1(x_0) +$

$+\text{Lin} \partial f_2(x_0) \neq R^n$, то $(\text{Lin} \partial f_1(x_0))^\perp \cap (\text{Lin} \partial f_2(x_0))^\perp \neq \{0\}$, т.е. $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$.

Значит, существует такой элемент $\bar{x} \neq 0$, что $\bar{x} \in H_1 \cap H_2, \|\bar{x}\| \leq \varepsilon$.

Поскольку $\text{Lin} \partial f_1(x_0) \cap \text{Lin} \partial f_2(x_0) = \{0\}$, то $H_1 + H_2 = R^n$. Значит, существуют линейные операторы P_1 и P_2 такие, что для любого $y \in R^n$ $y = P_1 y + P_2 y$.

Фиксируя $\alpha, \bar{x}$, покажем, что уравнение

$$g(\alpha, \bar{x}, y) = \Psi_1(\alpha, \bar{x} + P_1 y) - \Psi_2(\alpha, \bar{x} - P_2 y) = 0$$

имеет решение. Для этого достаточно доказать что отображение $f(\alpha, \bar{x}, y) \equiv y - g(\alpha, \bar{x}, y) = r_1(\alpha, \bar{x} + P_1 y) - r_2(\alpha, \bar{x} - P_2 y)$ имеет неподвижную точку.

Заметим, что $\frac{r_1(\alpha, \bar{x} + P_1 y)}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|y\|^2}} \rightarrow 0$, если $\alpha \rightarrow 0, \bar{x} \rightarrow 0, y \rightarrow 0$. Поэтому

$\|f(\alpha, \bar{x}, y)\| = \|r(\alpha, \bar{x}, y)\| \leq \bar{r}(\alpha, \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|y\|^2})$, где $\bar{r}(\alpha, t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{r}(\alpha, t)$ не убывает по t . В самом деле, в случае, если это не так, заменим функцию $\bar{r}(\alpha, t)$ на функцию $\omega(\alpha, t) = \sup\{\bar{r}(\alpha, \lambda) : 0 \leq \lambda \leq t\}$.

Пусть теперь $\tau(\alpha, \bar{x}) = \inf\{\tau : \bar{r}(\alpha, \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \tau^2}) \leq \tau\}$. При достаточно малых $\bar{x}, \alpha$ выполняется неравенство $\bar{r}(\alpha, \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2}) = \bar{r}(\alpha, \sqrt{2} \|\bar{x}\|) \leq \|\bar{x}\|$, поэтому $\tau(\alpha, \bar{x}) \leq \|\bar{x}\|$. Кроме того, по определению нижней грани для каждого $\bar{x}$ существует такое $\tau^*(\alpha, \bar{x})$, что $\tau(\alpha, \bar{x}) \leq \tau^*(\alpha, \bar{x}) \leq \tau(\alpha, \bar{x}) + \|\bar{x}\|^2$, $\bar{r}(\alpha, \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + (\tau^*(\alpha, \bar{x}))^2}) \leq \tau^*(\alpha, \bar{x})$. Покажем, что $\tau(\alpha, \bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$. По определению $\tau(\alpha, \bar{x})$, имеем

$\tau(\alpha, \bar{x}) - \|\bar{x}\|^2 < \bar{r}(\alpha, \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + (\tau(\alpha, \bar{x}) - \|\bar{x}\|^2)^2}) \leq \bar{r}(\alpha, \|\bar{x}\| + |\tau(\alpha, \bar{x}) - \|\bar{x}\|^2|)$, где использован тот факт, что $\bar{r}(\alpha, t)$ — неубывающая функция и $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta, \alpha > 0, \beta > 0$.

Далее, так как $\tau(\alpha, \bar{x}) \leq \|\bar{x}\|$ достаточно для малых $\bar{x}$, то

$$\bar{r}(\alpha, \|\bar{x}\| + |\tau(\alpha, \bar{x}) - \|\bar{x}\|^2|) \leq \bar{r}(\alpha, 3\|\bar{x}\|),$$

откуда $\tau(\alpha, \bar{x}) - \|\bar{x}\|^2 \leq \bar{r}(\alpha, 3\|\bar{x}\|)$, т.е. $\frac{\tau(\alpha, \bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$.

Следовательно, $\frac{\tau^*(\alpha, \bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$.

Если теперь $\|y\| \leq \tau^*(\alpha, \bar{x})$, то $\|f(\alpha, \bar{x}, y)\| \leq \tau^*(\alpha, \bar{x})$.

Значит, непрерывное отображение $f(\alpha, \bar{x}, \cdot)$ отображает шар $\|y\| \leq \tau^*(\bar{x})$ в себя. На основании теоремы Брауера отображение $f(\alpha, \bar{x}, \cdot)$ имеет неподвижную точку в этом шаре, т.е. существует отображение $y(\alpha, \bar{x})$ такое, что

$$f(\alpha, \bar{x}, y(\alpha, \bar{x})) = y(\alpha, \bar{x}), \quad \|y(\alpha, \bar{x})\| \leq \tau^*(\alpha, \bar{x}).$$

Следовательно,

$$\frac{\|y(\alpha, \bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, $g(\alpha, \bar{x}, y(\alpha, \bar{x})) = 0$.

Положим

$$\Psi(\alpha, \bar{x}) \equiv \Psi_1(\alpha, \bar{x} + P_1(y(\alpha, \bar{x}))) = \Psi_2(\alpha, \bar{x} - P_2(y(\alpha, \bar{x}))). \quad (2.3)$$

Тогда

$$\Psi(\alpha, \bar{x}) = \Psi_1(\alpha, \bar{x} + P_1(y(\alpha, \bar{x}))) = \bar{x} + P_1(y(\alpha, \bar{x})) + r_1(\alpha, \bar{x} + P_1(y(\alpha, \bar{x}))) = \bar{x} + r(\alpha, \bar{x}),$$

где $r(\alpha, \bar{x}) = P_1(y(\alpha, \bar{x})) + r_1(\alpha, \bar{x} + P_1(y(\alpha, \bar{x})))$. В силу (2.2) и того, что $\frac{r_1(\alpha, \bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$, $r(\alpha, \bar{x})$ обладает тем же свойством. Положим

$$Z_1(\alpha, \bar{x}) = \bar{x} + P_1(y(\alpha, \bar{x})), \quad Z_2(\alpha, \bar{x}) = \bar{x} - P_2(y(\alpha, \bar{x})).$$

В силу равенства (2.3) $\Psi(\alpha, \bar{x}) = \Psi_1(Z_1(\alpha, \bar{x})) = \Psi_2(Z_2(\alpha, \bar{x}))$. Если $\bar{x} \in Hi$, то $Z_i(\alpha, \bar{x}) \in Hi$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ настолько малым, что при $\|\bar{x}\| < \varepsilon_1$, $\bar{x} \in H, \bar{x} \neq 0$, и при достаточно малых $\alpha \in (-\eta, \eta)$ следует, что $Z_i(\alpha, \bar{x}) \in U(0, \varepsilon)$. Значит $f_1(\psi(\alpha, \bar{x})) = \alpha$, $f_2(\psi(\alpha, \bar{x})) = \alpha$ при малых $\alpha \in (-\eta, \eta)$. Значит, если $U(x_0)$ – окрестность точки x_0 , то при достаточно малых $\bar{x}, \alpha$ $\psi(\alpha, \bar{x}) \in U(x_0) \cap a(\alpha)$, т.е. a п.н. св. в нуле.

Докажем теперь, что м.о. a п.н. св. в нуле. Для этого сначала покажем, что м.о. $F(\alpha) \equiv \{x / f_1(x) \leq \alpha, f_2(x) \leq \alpha\}$ п.н. св. в нуле. Пусть $y \in R^n$. Имеем

$$d_{M_1 \cap M_2}(y) = \inf_{z \in M_1 \cap M_2} \|y - z\| \leq \|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\|$$

для любых $x \in M_1, z \in M_1 \cap M_2$. Значит,

$$d_{M_1 \cap M_2}(y) \leq \|y - x\| + d_{M_1 \cap M_2}(x). \quad (2.4)$$

Покажем, что $0 \in \text{int}(M_1 - M_2)$.

Так как $\overline{\text{con}\partial f_1(x_0) + \text{con}\partial f_2(x_0)} \subseteq \overline{\text{lin}\partial f_1(x_0) + \text{lin}\partial f_2(x_0)} \neq R^n$, то существует вектор $w \notin \overline{\text{con}\partial f_1(x_0) + \text{con}\partial f_2(x_0)}$. Значит, по теореме отделимости существует вектор g такой, что для любого $v \in \overline{\text{con}\partial f_1(x_0) + \text{con}\partial f_2(x_0)}$ имеем $\langle v, g \rangle < \langle g, w \rangle \leq 0$, т.е. $f_1'(x_0, g) < 0, f_2'(x_0, g) < 0$. Следовательно, $0 \in \text{int}(M_1 - M_2)$.

Рассмотрим теперь многозначное отображение

$$F(x) = \begin{cases} x - M_2, & x \in M_1 \\ \emptyset, & x \notin M_1. \end{cases}$$

Очевидно, что $F^{-1}(0) = M_1 \cap M_2$.

Пусть $y_0 = 0$ и $x_0 \in F^{-1}(0)$. Следовательно, существует такое $\gamma > 0$, что $\forall x \in M_2, \forall y \in y_0 + \gamma B; d(x, F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\gamma} d_{M_1}(x - y)(1 + \|x - x_0\|)$ (см. теорему 1 [1], с. 136).

Возьмем $y = 0$, и поскольку M_2 – компакт, то существует $c > 0$, что $1 + \|x - x_0\| \leq c, \forall x \in M_2$. Таким образом, существует число $m > 0$ такое, что $d_{M_1 \cap M_2}(x) \leq m d_{M_1}(x), \forall x \in M_2$. Применим этот результат к неравенству (2.4), получим

$$d_{M_1 \cap M_2}(y) \leq \|y - x\| + m d_{M_1}(x) \leq \|y - x\| + m(\|x - y\| + \|y - u\|),$$

$\forall x \in M_2, u \in M_1$, отсюда

$$d_{M_1 \cap M_2}(y) \leq A(d_{M_1}(y) + d_{M_2}(y)), \quad (2.5)$$

где $A = m + 1$. Предположим, что a не п.н. св. в нуле. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $\alpha_j \rightarrow 0, x_j \in a(\alpha_j)$ такие, что $x_j \notin a(0) + \varepsilon_0 B$. Отсюда $d(x_j, a(0)) \geq \varepsilon_0$. Но, с другой стороны, имея в виду неравенство (2.5), получим

$$d(x_j, a(0)) \leq A(d_{M_1}(x_j) + d_{M_2}(x_j)). \quad (2.6)$$

Если $x_j \notin M_1, x_j \notin M_2$, то можно показать, что существуют числа $c_1 > 0, c_2 > 0$ такие, что $d_{M_1}(x_j) \leq c_1 f_1(x_j); d_{M_2}(x_j) \leq c_2 f_2(x_j)$.

В этом случае $d(x_j, a(0)) \leq A c_1 \alpha_j + A c_2 \alpha_j \rightarrow 0$, что противоречие, поскольку $d(x_j, a(0)) \geq \varepsilon_0$. В остальных случаях также правая часть неравенства (2.6) стремится к нулю, что противоречие. Таким образом, м.о. F п.н. св. в нуле. Но поскольку $a(\alpha) \subset F(\alpha)$, то, согласно теореме 8 [1] (с. 116), a также п.н. св. в точке 0.

Таким образом, мы доказали непрерывность в нуле многозначного отображения a . Теорема доказана.

Из теоремы 1 и из предложения 23 [1] (с. 125) непосредственно следует важное утверждение.

Следствие. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и пусть $f(x)$ – непрерывная функция и $V(\alpha) = \min_{x \in a(\alpha)} f(x)$. Тогда $V(\alpha)$ непрерывна в нуле.

Рассмотрим м.о. $a(x) \equiv \{y \in F / \varphi(x, y) \leq 0\}$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие предположения:

1) $\varphi(x, y)$ – непрерывная функция, выпуклая по y при фиксированном x , и удовлетворяющая условию Липшица по x равномерно относительно $y \in F$:

$$|\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y)| \leq L \|x_1 - x_2\|; \forall y \in F,$$

где F – выпуклый компакт;

2) Пусть E – связанный компакт и для $\forall x \in E, \exists y \in F$ такой, что $\varphi(x, y) < 0$. Тогда м.о. $a(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Сначала покажем, что существует непрерывное отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in F; \varphi(x, D(x)) < 0, \forall x \in E$. Существует отображение $\bar{y}(x)$ (не обязательно непрерывное из E в F) такое, что

$$f(x, \bar{y}(x)) = \min_{y \in F} f(x, y).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f(\cdot, y)$ непрерывна по x , то существует окрестность $B(x, \eta(x))$ точки x такая, что $f(z, \bar{y}(x)) \leq f(x, \bar{y}(x)) + \varepsilon, \forall z \in B(x, \eta(x))$.

Поскольку E – компакт, он может быть покрыт n шарами $B(x_i, \eta(x_i))$. Пусть $g_i (i = 1, \dots, n)$ – непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому разбиению. Введем функцию $D(x)$, определенную по формуле

$$D(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) \cdot \bar{y}(x_i).$$

Она непрерывна, поскольку таковыми являются функции g_i . Наконец так как функция $y \rightarrow f(x, y)$ выпукла, $g_i(x) \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, то получаем $f(x, D(x)) \leq \sum_{i \in I(x)} g_i(x) \cdot f(x, \bar{y}(x_i))$, где $I(x) = \{i / g_i(x) > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Это множество непусто, так как $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$.

С другой стороны, если $g_i(x) > 0$, то x принадлежит носителю g_i , который содержится в шаре $B(x_i, \eta(x_i))$. Если $g_i(x) > 0$, то $x \in B(x_i, \eta(x_i))$ и, следовательно,

$$f(x, \bar{y}(x_i)) \leq f(x_i, \bar{y}(x_i)) + \varepsilon = \min_{y \in F} f(x_i, y) + \varepsilon \leq \max_{x \in E} \min_{y \in F} f(x, y) + \varepsilon = V^* + \varepsilon,$$

где $V^* \equiv \max_{x \in E} \min_{y \in F} f(x, y)$.

В силу предположения теоремы имеем $V^* < 0$. Следовательно,

$$f(x, D(x)) \leq \sum_{i \in I(x)} g_i(x)(V^* + \varepsilon) = V^* + \varepsilon < 0$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поскольку F выпукло, то $D(x) \in F$.

Положим $\varepsilon(x) \equiv \varphi(x, D(x)) < 0$. Если $y_1 \in a(x_1)$, то $y_1 \in F$ и $\varphi(x_1, y_1) \leq 0$, то при $\lambda \in [0, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda D(x_2)) &\leq (1-\lambda)\varphi(x_2, y_1) + \lambda\varphi(x_2, D(x_2)) = (1-\lambda)\varphi(x_1, y_1) + \\ &+ (1-\lambda)[\varphi(x_2, y_1) - \varphi(x_1, y_1)] + \lambda\varepsilon(x_2) \leq L \|x_2 - x_1\| + \lambda\varepsilon(x_2). \end{aligned}$$

Если теперь положить $\lambda = -\frac{L}{\varepsilon(x_2)} \|x_1 - x_2\|$, то получаем

$$\varphi(x_2, y_1 - \frac{L}{\varepsilon(x_2)} \|x_1 - x_2\| (D(x_2) - y_1)) \leq 0.$$

Если $\|x_2 - x_1\|$ достаточно мало, то $0 < \lambda < 1$. Поэтому любой точке $y_1 \in a(x_1)$ можно поставить в соответствие точку $y_2 \in a(x_2)$ по следующей формуле

$$y_2 = y_1 - \frac{L}{\varepsilon(x_2)} \|x_1 - x_2\| (D(x_2) - y_1).$$

Так как $\varepsilon(x_2) < 0$, а $a(x)$ ограничены на компакте, то

$$\|y_2 - y_1\| \leq \frac{L}{\|\varepsilon(x_2)\|} \|D(x_2) - y_1\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\| \quad (2.7).$$

для некоторого $L_1 > 0$. Если теперь учесть полную равноправность x_1 и x_2 , то

формула (2.7) покажет, что расстояние между множествами $a(x_1)$ и $a(x_2)$ не превосходит $L_1 \|x_1 - x_2\|$, т.е. отображение a удовлетворяет локальному условию Липшица. Из локального условия Липшица с одной и той же константой следует глобальное условие на всем связном компакте E .

Следствие 1. Пусть выполнены все предположения теоремы. Если $0 \in a(0)$, то существует непрерывное отображение $y(x) \in a(x)$ такое, что $\|y(x)\| \leq c \|x\|$ при некотором $c > 0$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $F(x) = a(x) \cap B(0, \gamma \|x\|)$, где $\gamma = 2c$. Можно показать, что $F(x)$ непрерывна. Применяя теорему Майкла [3], получим требуемый результат.

Следствие 2. Пусть $f(x, y)$ – выпуклая функция на $R^n \times R^m$, а $F \in R^m$ – выпуклый компакт. Положим $V(x) = \min_{y \in F} f(x, y)$, $a_\varepsilon(x) = \{y \in F / f(x, y) \leq V(x) + \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ – некоторое положительное число. Тогда м.о. a_ε локально удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 3. Пусть $f(x, y)$ – непрерывная функция и при фиксированном x выпукла по y . Пусть $a(x) = \{y / f(x, y) = 0\}$. Пусть $a(x_0) \neq \emptyset$ и если $y \in a(x_0)$, то $0 \notin \partial_y f(x_0, y)$. Тогда $a(x) \neq \emptyset$ в некоторой окрестности точки x_0 и м.о. a п.н. сн. в этой точке.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда существуют $v_0 \in a(x_0), x_j \rightarrow x_0, \varepsilon > 0$ такие, что $\rho(v_0, a(x_j)) \geq \varepsilon_0$.

Если $0 \notin \partial_y f(x_0, v_0)$, то существует вектор w такой, что $f'_y(x_0, w) < 0$. Значит,

$$f(x_0, v_0 + \alpha w) = f(x_0, v_0) + \alpha [f'_y(x_0, w) + \frac{0(\alpha)}{\alpha}] < 0 \quad (2.8)$$

при малых $\alpha \in (0, \delta_1)$. С другой стороны,

$$f(x_0, v_0 - \alpha w) - f(x_0, v_0) \geq \alpha \langle x^*, -w \rangle > 0 \quad (2.9)$$

при $\alpha \in (0, \delta_1)$.

Пусть α так мало, что $\bar{v}_1 = v_0 + \alpha w, \bar{v}_2 = v_0 - \alpha w \in U_{\varepsilon_0/4}(v_0)$. В силу непрерывности $f(\cdot, v)$ из (2.8) и (2.9) следует, что $f(x_j, \bar{v}_1) < 0, f(x_j, \bar{v}_2) > 0$. Поэтому $f(x_j, \lambda \bar{v}_1 + (1 - \lambda) \bar{v}_2) = 0$ при некотором $\lambda \in (0, 1)$, т.е. вектор $\bar{v} = \lambda \bar{v}_1 + (1 - \lambda) \bar{v}_2 \in B_{\varepsilon_0/2}(v_0)$ и $\bar{v} \in a(x_j)$. Следовательно, $\|v_0 - \bar{v}\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, но это невозможно, поскольку $\rho(v_0, a(x_j)) \geq \varepsilon_0$.

Теорема 4. Пусть м.о. $a(x)$ с выпуклыми замкнутыми значениями определено в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и оно замкнуто в этой точке. Пусть, далее, α ограничено на окрестности $U(x_0)$, т.е. множество $\bigcup_{x \in U(x_0)} \alpha(x)$ ограничено.

Пусть $v \in a(x)$, $K(x, v) = \{y = \lambda(u - v) / \lambda > 0, u \in a(x)\}$. Для того чтобы м.о. a было п.н. сн. в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы м.о. $K^*(x, v)$ было замкнутым в точках $(x_0, v), v \in a(x_0)$.

Доказательство. Пусть $a(x)$ – п.н. сн. отображение в точке x_0 . Нужно показать, что если $x_j^* \in K^*(x_j, v_j), x_j \rightarrow x_0, v_j \rightarrow v_0, x_j^* \rightarrow x_0^*$ при $j \rightarrow \infty$, то $x_0^* \in K^*(x_0, v_0)$. Допустим, что $x_0^* \notin K^*(x_0, v_0)$. Тогда $(x_0^*, z_0) \leq -\delta < 0$ при некоторых $z_0 \in K(x_0, v_0), \delta > 0$. При достаточно больших j имеем $(x_j^*, z_0) \leq -\frac{\delta}{2} < 0$. В силу определения $K(x_0, v_0)$ точку z_0 представим в виде $z_0 = \lambda(\bar{u} - v_0), \bar{u} \in a(x_0)$. Так как $a(x)$ п.н. сн., то существуют $\bar{u}_j \in a(x_j)$ такие, что $\bar{u}_j \rightarrow \bar{u}$. Рассмотрим точки $z_j = \lambda(\bar{u}_j - v_j)$. Поскольку $\bar{u}_j \in a(x_j), v_j \in a(x_j)$, то $z_j \in K(x_j, v_j), z_j = z_0 + (z_j - z_0) = z_0 + \lambda(\bar{u}_j - \bar{u}) + \lambda(v_0 - v_j)$. Далее, так как $x_j^* \in K^*(x_j, v_j)$, то

$$0 \leq (x_j^*, z_j) = (x_j^*, z_0) + \lambda(x_j^*, \bar{u}_j - \bar{u}) + \lambda(x_j^*, v_0 - v_j). \quad (2.10)$$

Так как последовательность $\{x_j^*\}$ ограничена и $\bar{u}_j \rightarrow \bar{u}, v_j \rightarrow v_0, (x_j^*, z_0) \leq -\delta/2 < 0$, то при достаточно больших j левая часть соотношения (2.10) становится отрицательной, что противоречие.

Покажем обратную часть теоремы. Пусть м.о. $K^*(x, v)$ замкнуто в точках (x_0, v) . Нужно показать, что $a(x)$ п.н. сн. в точке x_0 . Пусть это не так. Это означает, что существуют $x_j \rightarrow x_0, v_0 \in a(x_0)$ такие, что

$$\rho(a(x_j), v_0) = \min_{v \in a(x_j)} \|v - v_0\| = \|v_j - v_0\| \rightarrow \|\bar{v} - v_0\| > 0.$$

Здесь $v_j \in a(x_j), v_j \rightarrow \bar{v}$, и поскольку $a(x)$ замкнуто в x_0 , то $\bar{v} \in a(x_0)$. Рассмотрим экстремальные задачи $\|v - v_0\| \rightarrow \min, v \in a(x_j)$. Решение их v_j удовлетворяет необходимым и достаточным условиям экстремума

$$\frac{v_j - v_0}{\|v_j - v_0\|} \in K^*(x_j, v_j). \quad (2.11)$$

Поскольку м.о. K^* замкнуто в точке $(x_0, \bar{v})$, то из (2.11) следует, что

$$\frac{\bar{v} - v_0}{\|\bar{v} - v_0\|} \in K^*(x_0, \bar{v}).$$

Но это означает, что функция $f(v) = \|v - v_0\|$ принимает свое минимальное значение на $a(x_0)$ в точке $\bar{v} \neq v_0$. Однако это невозможно, поскольку $\bar{v} \in a(x_0), v_0 \in a(x_0)$. Полученное противоречие и доказывает вторую часть теоремы. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть м.о. a_1, a_2 определены в некоторой окрестности точки

x_0 и непрерывны в этой точке. Пусть для любого x множества $a_1(x), a_2(x)$ – выпуклые компакты и $\text{int } a_1(x_0) \cap a_2(x_0) \neq \emptyset$. Тогда $a(x) \equiv a_1(x) \cap a_2(x) \neq \emptyset$ в некоторой окрестности точки x_0 и м.о. a непрерывно в этой точке.

Доказательство. Легко показать, что в некоторой окрестности точки x_0 имеет место $\text{int } a_1(x) \cap a_2(x) \neq \emptyset$. Рассмотрим конусы касательных направлений $K_1(x, v), K_2(x, v)$ соответственно к множествам $a_1(x), a_2(x)$. Тогда известно [1], что конус $K(x, v) = K_1(x, v) \cap K_2(x, v)$ является конусом касательных направлений для $a(x)$ в точке $v \in a(x)$ и $K^*(x, v) = K_1^*(x, v) + K_2^*(x, v)$. Покажем, что м.о. $K_1^* + K_2^*$ замкнуто в $(x_0, v_0), v_0 \in a(x_0)$. Действительно, пусть $x_j \rightarrow x_0, v_j \rightarrow v_0, z_j^* \rightarrow z_0^*, z_j^* \in K^*(x_j, v_j)$. Имеем $z_j^* = u_j^* + v_j^*$, где $u_j^* \in K_1^*(x_j, v_j), v_j^* \in K_2^*(x_j, v_j)$. Покажем, что последовательности $\{u_j^*\}$ и $\{v_j^*\}$ ограничены. Действительно в противном случае (не ограничивая общности) можно считать, что $\|u_j^*\| \rightarrow \infty, \frac{u_j^*}{\|u_j^*\|} \rightarrow u_0^*$. Тогда

$$\frac{u_j^*}{\|u_j^*\|} + \frac{v_j^*}{\|u_j^*\|} = \frac{z_j^*}{\|u_j^*\|} \rightarrow 0. \quad \text{Откуда следует, что } \frac{v_j^*}{\|u_j^*\|} \rightarrow -u_0^*.$$

Точки $\frac{u_j^*}{\|u_j^*\|}$ принадлежат конусу $K_1^*(x_j, v_j)$, а точки $\frac{v_j^*}{\|u_j^*\|}$ – конусу $K_2^*(x_j, v_j)$.

Так как м.о. K_1^*, K_2^* замкнуты в точке (x_0, v_0) , то предельные точки $u_0^*, -u_0^*$ содержатся в $K_1^*(x_0, v_0), K_2^*(x_0, v_0)$ соответственно, причем по построению $\|u_0^*\| \neq 0$. Но тогда $(u_0^*, \bar{x}) \geq 0 \forall \bar{x} \in K_1(x_0, v_0), (-u_0^*, \bar{y}) \geq 0 \forall \bar{y} \in K_2(x_0, v_0)$, т.е.

$$(u_0^*, \bar{x} - \bar{y}) \geq 0. \quad (2.12)$$

Пусть $\bar{x} = \bar{u}_1 - v_0, \bar{u}_1 \in a_1(x_0), \bar{y} = \bar{u}_2 - v_0, \bar{u}_2 \in a_2(x_0)$.

Тогда $\bar{x} - \bar{y} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in a_1(x_0) - a_2(x_0)$. Так как $\text{int } a_1(x_0) \cap a_2(x_0) \neq \emptyset$, то существует окрестность $U_\delta(0)$ нуля такая, что $U_\delta(0) \in a_1(x_0) - a_2(x_0)$. Теперь если $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in U_\delta(0)$, то из (2.12) следует, что $(u_0^*, \bar{z}) \geq 0 \forall \bar{z} \in U_\delta(0)$, но это невозможно, поскольку $u_0^* \neq 0$.

Итак, последовательности $\{u_j^*\}, \{v_j^*\}$ ограничены. Значит, из них можно выделить подпоследовательности, сходящиеся к некоторым u_1^*, v_1^* элементам. При этом должно выполняться равенство $z_0^* = u_1^* + v_1^*$. С другой стороны, так как м.о. $K_i^*(x, v) (i=1,2)$ замкнуты в (x_0, v_0) , то $u_1^* \in K_1^*(x_0, v_0), v_1^* \in K_2^*(x_0, v_0)$, т.е. $z_0^* \in K^*(x_0, v_0)$. Следовательно, м.о. $K^*(x, v)$ также замкнуто в точке

(x_0, v_0) и, согласно теореме 3, м.о. $a(x)$ п.н. сн. в x_0 . М.о. a п.н. св., по теореме 8 [1] (с. 116). Теорема доказана.

Кафедра прикладного анализа

Поступила 25.04.2002

ЛИТЕРАТУРА

1. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
3. Michael E. Continuous selections. Ann.Math, 1956, v. 63, № 2, p. 361–382.

Ա.Ռ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ռ.Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԲԱԶՄԱՐԺԵՔ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՆՈՂԴԱՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Բազմարժեք արտապատկերումների անընդհատության ուսումնասիրությունը կարևոր նշանակություն ունի պարամետրից կախված օպտիմալացման խնդիրներում և դիֆերենցիալ պատկանելիությունների տեսության մեջ:

Հոդվածում ուսումնասիրվում է հավասարության և անհավասարության տիպի սահմանափակումներով տրվող բազմարժեք արտապատկերումների անընդհատության հարցը: Տրվում է նաև բավարար պայման, որի դեպքում անընդհատ բազմարժեք արտապատկերումների հատումը նորից անընդհատ բազմարժեք արտապատկերում է:

A.R. KHACHATRYAN, R.A. KHACHATRYAN

ON CONTINUITY OF MULTIVALUED MAPPINGS

Summary

The problem of continuity of multivalued mappings plays a great role in parametrical problems of optimization and in theory of differential inclusion. The article studies the problem of continuity of some multivalued mappings, which are given by inequalities and equations. The article also provides sufficient conditions under which the intersection of multivalued mappings is a continuous multivalued mapping too.