ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2003 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

Г.Г. КАЗАРЯН

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается нелинейное уравнение, связанное с гиперболическими, удовлетворяющими принципу Гюйгенса. Получается эволюционное уравнение для огибающей колебаний, описываемых его решениями, показывается, что оно является нелинейным уравнением Шредингера.

Многие естественные нелинейные системы допускают решение в виде гармонических волновых пакетов – гармоник [1]

$$\varphi = a \cdot \exp[i[kx - \omega t]]$$

в предположении, что амплитуда a настолько мала, что ее изменением в пространстве и во времени из-за эффектов нелинейности можно пренебречь [1]. В настоящей работе рассмотрим случай, когда основное состояние системы представляет собой линейную гармонику, которая, хотя и мала по амплитуде, но не настолько, чтобы можно было пренебречь эффектами нелинейности, а именно: когда огибающая волны медленно меняется как по пространственной, так и по временной переменной по сравнению с несущей. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_{tt} + \alpha u + 3u_{xxx} + 20uu_{xx} + 15u_x^2 = 0, \qquad (1)$$

связанное с гиперболическими, удовлетворяющими принципа Гюйгенса [1, 2].

С помощью метода многомасштабных разложений из теории возмущений [1] найдем эволюционное уравнение для огибающей колебаний, отвечающей (1), и покажем, что оно является нелинейным уравнением Шредингера.

Пусть x и t – обычные пространстенная и временная переменные для несущей волны. Введем набор "медленных" временных и пространственных переменных:

$$T_n = \varepsilon^n t \ , \ X_n = \varepsilon^n x \ , \ (\varepsilon << 1). \qquad (2)$$

Эти медленные переменные, рассматриваемые как независимые, являются переменными, в которых естественно будет описывать движение огибающей.

Разложим решение уравнения (1) в асимптотический ряд по степеням ε в некоторой окрестности решения $\varphi = 0$:

$$\varphi = \varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + \ \dots \qquad (3)$$

Преобразуем дифференциальные операторы в (1) так, чтобы была учтена зависимость медленных переменных X_n и T_n от x и t:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_2} + \ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в уравнение (1), получим

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \ldots\right]^2 + 3\left[\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1} + \ldots\right]^4 + \alpha\right\}\left(\varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + \varepsilon^3\varphi^{(3)} + \ldots\right) +$$
$$+ 20\left(\varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + \varepsilon^3\varphi^{(3)} + \ldots\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \ldots\right)^2,$$
$$\left(\varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + \varepsilon^3\varphi^{(3)} + \ldots\right) +$$
$$+ 15\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1} + \ldots\right]\left(\varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + \varepsilon^3\varphi^{(3)} + \ldots\right)\right\}^2 = 0. \tag{5}$$

Отсюда можно найти коэффициенты при различных степенях ε:

$$o(\varepsilon):\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 3\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \alpha\cdot\varphi^{(1)}\right) = 0, \tag{6}$$

$$o(\varepsilon^2):\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 3\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \alpha\right)\varphi^{(2)} = -2\left(\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1} + 6\frac{\partial^4}{\partial x^3\,\partial T_1}\right)\varphi^{(1)} - 20\varphi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x^2} - 15\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\right)^2, \tag{7}$$

$$o(\varepsilon^3):\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 3\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \alpha\right)\varphi^{(3)} = -2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1} + 6\frac{\partial^4}{\partial x^3\,\partial T_1}\right)\varphi^{(2)} -$$
$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 18\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial X_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1}\right)\varphi^{(1)} - 30\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial X_1} - 30\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial X_1} -$$
$$- 20\varphi^{(2)}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x^2} - 40\varphi^{(2)}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x\,\partial X_1} - 20\varphi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi^{(2)}}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Мы можем выбрать решение уравнения (6) в виде гармоники, но поскольку дифференциальные операторы здесь относятся к быстрым переменным x и t, то полезно записать $\varphi^{(1)}$ в виде

$$\varphi^{(1)} = A(X_1, X_2, \ldots, T_1, T_2, \ldots)\exp(i\cdot\theta) + c.c\ ,\ \theta = kx - \omega t \tag{9}$$
$$3k^4 - \omega^2 + \alpha = 0,\ \alpha > 0,$$

$c.c$ – комплексно-сопряженное.

Функция A в (9) является произвольной (пока!) комплексной амплитудой, зависящей от медленных переменных. Тем самым мы получили линейное колебание, огибающая которого является функцией от медленных переменных. Таким образом, мы достигли разделения медленных и быстрых переменных.

Подставляя (9) в уравнение (7), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+3\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\alpha\right)\varphi^{(2)}=2i\left(\omega\frac{\partial A}{\partial T_1}+6k^3\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)\exp(i\theta)+$$
$$+35k^2A^2\exp 2i\theta+5k^2A\cdot A^*+c.c\ . \qquad (10)$$

Решая (10) относительно $\varphi^{(2)}$, мы замечаем, что однородная часть его решения такая же, как и у решения уравнения (6), в связи с тем, что линейные операторы в обоих случаях одинаковы. Следовательно, правая часть в (10) "резонирует" с этим решением, поскольку она также содержит члены $\exp(i\theta)$. Поэтому частный интеграл для $\varphi^{(2)}$ будет содержать член типа $\theta\exp(i\theta)$. Когда $t\to\infty$, член такого вида "взрывается", и теория возмущений становится неприменимой при $t>\varepsilon^{-1}$. Члены такого вида обычно называются секулярными. Для предотвращения такой возможности потребуем, чтобы функция A удовлетворяла уравнению

$$\omega\frac{\partial A}{\partial T_1}+6k^3\frac{\partial A}{\partial X_1}=0.$$

Введем новую переменную

$$\overline{X}=X_1-C_gT_1\ , \qquad (11)$$

где $C_g=\dfrac{d\omega}{dk}=\dfrac{6k^3}{\omega}$. Тогда амплитудная функция может быть записана в виде $A=A(\overline{X},\ T_2)=A\left(X_1-\dfrac{6k^3}{\omega}T_1,\ T_2\right)$.

Итак, частное решение $\varphi^{(2)}$ представляется в виде

$$\varphi^{(2)}=\alpha_1A^2\exp 2i\theta+\alpha_2|A|^2+B(\overline{X},\ T_2)+c.c\ , \qquad (12)$$

где $\alpha_1=\dfrac{35k^2}{36k^4-3\alpha}$, $\alpha_2=\dfrac{5k^2}{\alpha}$, а B возникает как постоянная интегрирования, которая либо равна нулю, либо пропорциональна $|A|^2$.

Подставляя (12) в (8), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+3\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\alpha\right)\varphi^{(3)}=160\alpha_1k^2A^3\exp 3i\theta+i(144\alpha_1k^3-70k)\cdot A\frac{\partial A}{\partial\overline{X}}\exp 2i\theta-10ikA^*\frac{\partial A}{\partial X}+$$
$$+\left[\left(18k^2-\frac{36k^6}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2A}{\partial\overline{X}^2}+2i\omega\frac{\partial A}{\partial T_2}+8\alpha_1k^2|A|^2\right]\exp i\theta+c.c\ . \qquad (13)$$

Как и в случае интегрирования уравнения (10), удаление секулярных членов, связанных с $\exp(i\theta)$, приводит к следующему уравнению:

$$2i\omega\frac{\partial A}{\partial T_2}+\left(18k^2-\frac{36k^6}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2A}{\partial\overline{X}^2}+80\alpha_1k^2A|A|^2=0,$$

которое является нелинейным уравнением Шредингера [1].

Кафедра высшей математики физфака *Поступила 26.04.2002*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррио Х.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
2. **Kazarian G.G., Oganesian A.O.** – Countemp. Math. Anal.,1994, v. 29, № 5, p. 64–73.

Գ.Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ԵՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է Հյուգենսի սկզբունքին բավարարող հիպերբոլական հավասարումների հետ կապված ոչ գծային հավասարում: Այդ հավասարման լուծումներով նկարագրվող տատանումների պարուրիչի համար ստացվում է էվոլուցիոն հավասարում, ցույց է տրվում, որ այն հանդիսանում է Շրյոդինգերի ոչ գծային հավասարում:

G.G. GHAZARYAN

ON A THIRD ORDER NONLINEAR EQUATION

Summary

In this work a nonlinear equation, connected with the hyperbolic equations, satisfying the Huygens' principle, is considered. An evolution equation for the bend of oscillations, described by the solutions of these equations, is obtained. The fact that it is a nonlinear Shrödinger equation, is shown.