ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2003 Естественные науки

Математика

УДК 518.9

М.С. ГАБРИЕЛЯН, А.Г. МАТЕВОСЯН

МИНИМАКСНОЕ ПРИЦЕЛИВАНИЕ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ СОБСТВЕННО ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача сближения с m целевыми множествами для поэтапно меняющихся стохастических систем. При определенных условиях, поставленных на стохастические процессы, строится экстремальная стратегия методом экстремального прицеливания.

1. Пусть движение поэтапно меняющейся конфликтно-управляемой системы описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$dx_k(t) = A_k(t)x_k dt + f_k(t, u_k, v_k)d\xi_k; \qquad k \in I = \{1,\dots,m\},\ t > t_0, \qquad (1.1)$$

где $x_k \in R^n$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$ – квадратная матрица с непрерывными элементами, $f_k : [t_0, \infty) \times P_k \times Q_k \to R^n$ – непрерывная функция, $P_k \subset R^{p_k}, Q_k \subset R^{q_k}$ – компакты, характеризующие возможности игроков, $\xi_k = \xi_k(t,\omega)$ – случайные процессы, определенные на вероятностных пространствах (Ω^k, B^k, P^k) и измеримые относительно $B_t^{\Omega^k}$. Здесь $B_t^{\Omega^k}$ – неубывающее семейство борелевских σ-подалгебр B^k. Пусть $\xi_k(t,\omega)$ является однородным процессом с независимыми приращениями и конечным моментом 2-го порядка, а моменты 1-го и 2-го порядков функции $\xi_k(t+h) - \xi_k(t)$ удовлетворяют условиям

$$M|\xi_k(t+h) - \xi_k(t)| \le C_k h, \quad M\left|(\xi_k(t+h) - \xi_k(t))^2\right| \le C_k h,$$
$$h > 0, C_k = const., \ k \in I. \qquad (1.2)$$

Тогда случайное поле

$$\alpha_k(t,x,h) = A_k(t)xh + f_k(t, u_k(t), v_k(t))(\xi_k(t+h) - \xi_k(t))$$

удовлетворяет условию квазидифференциальности, определенной в [1]. После этих предположений можно применить теорему существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения, приведенного в [1]. Обозначим через H_C пространство случайных процессов (случайных кривых) $x(t)=x(t,\omega)$, $t\in[t_*,\vartheta]$, $\omega\in\Omega$, со значениями в R^n, измеримых при каждом ω и среднеквадратически непрерывных на $[t_*,\vartheta]$, т.е. $M|x(t+h)-x(t)|^2\to 0$ при $h\to 0, t, t+h\in[t_*,\vartheta]$.

Согласно теореме 1 [1, стр. 241], стохастическое дифференциальное уравнение (1.1) при любом начальном значении x и при любом $k(k\in I)$ имеет в H_C единственное решение.

Предположим, что заданы некоторые замкнутые и ограниченные множества $M_k, k\in I=(1,...,m)$ в евклидовом пространстве R^{n+1}. Пусть также заданы моменты времени $\{\vartheta_k\}$ такие, что $t\ \le\vartheta_1<...<\vartheta_m\le T$. Предположим, что проекция множества M_k на ось t содержит точку ϑ_k, т.е.

$$M_k\cap\left[(t,x):t=\vartheta_k, x\in R^n\right]=M_k(\vartheta_k)\ne\varnothing,\ k\in I.$$

Пусть $M_k(\vartheta_k)$ – выпуклые, замкнутые и ограниченные множества в пространстве R^n.

Рассмотрим задачу сближения с множествами $M_k(\vartheta_k)$ в моменты ϑ_k. Согласно [2], решение системы (1.1) определяется формулой

$$x_k(\vartheta_k)=X_k[\vartheta_k,\vartheta_{k-1}]x_k(\vartheta_{k-1})+\int_{\vartheta_{k-1}}^{\vartheta_k}X_k[\vartheta_k,\tau]f_k(\tau,u_k,v_k)d\xi_k(\tau,\omega),\ \ k\in I,\quad (1.3)$$

где последний интеграл следует понимать как стохастический интеграл по процессу $\xi_k(t,\omega)$, а $X_k[\vartheta_k,\tau]$ – нормированная фундаментальная матрица с абсолютно непрерывными элементами, $x_k(\vartheta_{k-1})$ – начальное положение системы. Предполагается, что в точках $\vartheta_k, k\in I$, сохраняются условия непрерывности траекторий, т.е.

$$x_k(\vartheta_{k-1})=x_{k-1}(\vartheta_{k-1})\quad \text{п.н.}\ \ k\in I.$$

С учетом решения (1.3), для уравнения (1.1) поставим следующую задачу.

Задача. Найти стратегию $U_k^0+u_k^0(t,\omega)$, обеспечивающую встречи $x_k[\vartheta_k,t_0,x_0,u_0]\in M_k(\vartheta_k)$ п.н. $(k\in I)$.

Предположим, что для процессов $\xi_k(t,\omega)$ выполнено условие

$$\int_{t_0}^{t}d\xi_k(\tau,\omega)\ge 0 \ \text{при}\ t-t_0>0,\ k\in I.\quad (1.4)$$

Используя приведенные в [3] и [4] для m целевых множеств рассуждения для детерминированных собственно линейных систем, можно построить гипотетическое рассогласование, которое в нашем случае будет стохастическим:

$$\varepsilon_0(t_*,x_*,x_1,\dots,x_{l-1},\{\vartheta_k\},\omega)=\max_{\|l\|\le 1}\left[\sum_{k=1}^{l-1}l'_jx_j+\sum_{k=1}^{l-1}\min_{-p_k\in M_k(\vartheta_k)}l'_kp_k+\sum_{k=l}^{m}l'_k\overline{X}_k[\vartheta_k,t_*]\times\ldots\times\right.$$

$$\times X_l[\vartheta_l,t_*]x_* + \int\limits_{t_*}^{\vartheta_m} \min_{u_{k-j}\in P_{k-j}} \max_{v_{k-j}\in Q_{k-j}} \sum_{k=l}^{m} \sum_{j=0}^{k-l} l'_k \overline{X}_k[\vartheta_k,t_*]\ldots\overline{\overline{X}}_{k-j}[\vartheta_{k-j},\tau]\times$$
$$\times f_{k-j}(\tau,u_{k-j},v_{k-j})d\xi_{k-j}(\tau,\omega)+\sum_{k=l}^{m}\min_{-p_k\in M_k(\vartheta_k)} l'_k p_k\Bigg] \tag{1.5}$$

и $\varepsilon_0(t_*,x_*,x_1,\ldots,x_{l-1},\{\vartheta_k\},\omega)=0$, если правая часть в (1.5) отрицательна.

Здесь $\{t_*,x_*\},(t_*\in[\vartheta_{l-1},\vartheta_l))$ – начальное положение системы (1.1), $(x_1,x_2,\ldots,x_{l-1})$ считаются постоянными, матрицы $\overline{X}_k[\vartheta_k,\tau]$ и $\overline{\overline{X}}_k[\vartheta_k,\tau]$ определяются следующим образом:

$$\overline{X}_k[\vartheta_k,\tau]=\begin{cases} X_k[\vartheta_k,\vartheta_{k-1}], \tau\le\vartheta_{k-1}, \\ X_k[\vartheta_k,\tau], \vartheta_{k-1}\le\tau\le\vartheta_k, \\ E, \quad \tau\ge\vartheta_k; \end{cases} \quad \overline{\overline{X}}_k[\vartheta_k,\tau]=\begin{cases} 0, \quad \tau<\vartheta_{k-1}, \\ X_k[\vartheta_k,\tau], \vartheta_{k-1}\le\tau\le\vartheta_k, \\ 0, \quad \tau>\vartheta_k. \end{cases} \tag{1.6}$$

а l_k – n-мерный вектор-столбец с компонентами $(l_k^{(1)},\ldots,l_k^{(n)})$. Из формулы (1.5) вытекает справедливость следующего утверждения. Если $\varepsilon_0(t,x(t),\{\vartheta_k\})=0$ п.н. при $t\in[t_0,\vartheta_m]$, то для всех $k\in I$ $x_k(\vartheta_k)\in M_k$ п.н.

Выделим регулярный случай задачи сближения со всеми множествами и скажем, что он имеет место для всех позиций $(t_*,x_*)\in G$:

$G=[G_1\times G_2\times\ldots\times G_m]$,

$G_1=[(t,x):t_0\le t\le\vartheta_1, 0\le\varepsilon_0(t,x,\{\vartheta_k\})\le\beta]$,

$G_2=[(t,x):\vartheta_1\le t\le\vartheta_2, 0\le\varepsilon_0(t,x,x_1,\{\vartheta_k\})\le\beta,(t_1,x_1)\in G_1]$,

– –

$G_m=[(t,x):\vartheta_{m-1}\le t\le\vartheta_m;\ 0\le\varepsilon_0(t,x,x_1,\ldots,x_{m-1},t_1,\ldots,t_{m-1},\{\vartheta_k\})\le\beta;$

$(t_1,x_1)\in G_1,\ldots,(t_{m-1},x_{m-1})\in G_{m-1}]$, $\beta>0$,

если максимум в правой части (1.5) достигается на единственном векторе $\{l_k^0\}$ для всех x_i.

Вследствие единственности максимизирующего вектора $l^0=\{l_k^0\}$ изменяется непрерывно с изменением позиции $\{t_*,x_*\}$, $(t\in[\vartheta_{k-1},\vartheta_k))$. Поставим дополнительные условия на случайную функцию $\xi_k(t,\omega)$ ($k\in I$). Предположим, что для каждой измеримой, ограниченной функции $\gamma(t,u(t,\omega),v(t,\omega))$ $\int\limits_t^{t+\Delta t}\gamma(t,u(t,\omega),v(t,\omega))d\xi_k(t,\omega)$ можно представить в виде

$$\int\limits_t^{t+\Delta t}\gamma(\tau,u(\tau,\omega),v(\tau,\omega))d\xi_k(\tau,\omega)=\gamma(t,u(t,\omega),v(t,\omega))(\xi_k(t+\Delta t)-\xi_k(t))=$$
$$=\gamma(t,u(t,\omega),v(t,\omega))\eta(t,\Delta t,\omega)\Delta t, \tag{1.7}$$

где $\eta_k(t,\Delta t,\omega)$ остаются ограниченными при $\Delta t\to 0$ ($k\in I$).

Можно показать, что приращение $\Delta\varepsilon_0$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\Delta\varepsilon_0 \le \sum_{k=l}^{m} \sum_{j=0}^{k-l} l'_k \overline{X}_k[\vartheta_k, t] \ldots \overline{\overline{X}}_{k-j}[\vartheta_{k-j}, t] f_{k-j}(t, u_{k-j}, v_{k-j}) \eta_{k-j}(\Delta t, \omega)\Delta t -$$

$$- \min_{u_{k-j} \in P_{k-j}} \max_{v_{k-j} \in Q_{k-j}} \sum_{k=l}^{m} \sum_{j=0}^{k-l} l'_k \times \overline{X}_k[\vartheta_k, t] \ldots \overline{\overline{X}}_{k-j}[\vartheta_{k-j}, t] f_{k-j}(t, u_{k-j}, v_{k-j}) \eta_{k-j}(\Delta t, \omega)\Delta t + o(\Delta t), \tag{1.8}$$

где $\eta_{k-j}(\Delta t) = \eta_{k-j}(t, \omega, \Delta t)$ остаются ограниченными, когда $\Delta t \to 0$ ($k \in I$). После этого из оценки (1.8) можно установить [3, стр. 169], что когда $\Delta t \ge 0$, то $\Delta\varepsilon_0(\cdot) \le 0$, если первый игрок выбирает экстремальную стратегию из условия

$$\min_{u_{k-j} \in P_{k-j}} \max_{v_{k-j} \in Q_{k-j}} \sum_{k=l}^{m} \sum_{j=0}^{k-l} l'_k \overline{X}_k[\vartheta_k, t] \ldots \overline{\overline{X}}_{k-j}[\vartheta_{k-j}, t] f_{k-j}(t, u_{k-j}, v_{k-j}) \eta_{k-j}(t, \omega) =$$

$$= \max_{v_{k-j} \in Q_{k-j}} \sum_{k=l}^{m} \sum_{j=0}^{k-l} l'_k \overline{X}_k[\vartheta_k, t] \ldots \overline{\overline{X}}_{k-j}[\vartheta_{k-j}, t] f_{k-j}(t, u^0_{k-j}, v_{k-j}) \eta_{k-j}(t, \omega). \tag{1.9}$$

Таким образом, используя приведенные в [3,4] соображения, приходим к следующему выводу.

Теорема 1. Пусть ситуация для рассматриваемой задачи сближения регулярна. Тогда при условиях (1.4) и (1.7) экстремальная стратегия $U^0_k \div u^0_k(t,\omega)$, определяемая условием (1.9) при $\varepsilon_0(t,x,\omega) > 0$ и любым допустимым управлением при $\varepsilon_0(t,x,\omega) = 0$, обеспечит встречи $x(\vartheta_k, u^0, \omega) \in M_k(\vartheta_k)$ п.н., если только $\varepsilon_0(t_0, x_0\{\vartheta_k\}, \omega) = 0$ п.н.

Кафедра теоретической механики *Поступила 12.06.2002*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.
2. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
3. **Красовский Н.Н., Суботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1971.
4. **Габриелян М.С.** – Ученые записки ЕГУ, 1978, № 3, с. 38–45.

Մ.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Ա.Գ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՄԻՆԻՄԱՔՍԱՅԻՆ ՆՇԱՆԱՌՈՒԹՅԱՆ ԵՂԱՆԱԿԸ ԷՏԱՊ ԱՌ ԷՏԱՊ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ՄԱՍԱՄԲ ԳԾԱՅԻՆ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ m ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Էտապ առ էտապ փոփոխվող ստոխաստիկ համակարգերի համար դիտարկված է m նպատակային բազմությունների հետ մոտեցման խնդիր: Պատահական պրոցեսի վրա դրված որոշակի պայմանների դեպքում կառուցվել է էքստրեմալ ստրատեգիա էքստրեմալ նշանառության եղանակով:

M.S. GABRIELYAN, A.G. MATEVOSYAN

MINIMAX AIMING AT SEVERAL TARGET SETS FOR STAGE BY STAGE VARYING PROPER LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS

Summary

Problem of rapprochement is considered at m target sets for stage by stage varying stochastic system. Under certain conditions, based on stochastic processes, the extremal strategy is constructed by a method extremal aiming.