

Математика

УДК 512.8

В.Г. ТОГАНЯН

ПОДПРЯМО НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫЕ,
НОРМАЛЬНЫЕ И КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

В этой работе изучаются частично коммутативные, нормальные и квазинормальные подпрямо неразложимые алгебры. Доказывается, что в таких алгебрах мощность опорного множества ≤ 3 .

Введение. О предварительных понятиях и результатах относительно подпрямо неразложимых алгебр сказано в [1–4]. Здесь мы воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1. Любая дистрибутивная квазирешетка $A(\wedge, \vee)$, имеющая более одного элемента, изоморфна подпрямой сумме алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' .

Здесь $Q = \{0, 1, \infty\}$ – трехэлементная подпрямо неразложимая дистрибутивная квазирешетка, имеющая следующую таблицу операций:

$\wedge$	0	1	∞
0	0	0	∞
1	0	1	∞
∞	∞	∞	∞

$\vee$	0	1	∞
0	0	1	∞
1	1	1	∞
∞	∞	∞	∞

а $Q' = \{0, 1\}$, $Q'' = \{0, \infty\}$ – подпрямо неразложимые подалгебры алгебры Q (см. [1]).

§1. Подпрямо неразложимые частично коммутативные алгебры.

Теорема 1.1. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая алгебра, удовлетворяющая тождествам

$$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x, \quad (1.1)$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad (1.2)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad (1.3)$$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z), \quad (1.4)$$

и $\exists a, b, c \in A$ попарно неравны друг другу и удовлетворяют тождествам

$$t \wedge x = x \wedge t, \quad t \wedge x = x \vee t, \quad x \in A, t \in \{a, b, c\}. \quad (1.5)$$

Тогда если любая подалгебра алгебры $A(\wedge, \vee)$ подпрямо неразложима, то $A \cong Q$.

Доказательство. Конструктивным путем построим подмножество множества A следующим образом. Возьмем любое $x \in A$ и обозначим $A_x^{(1)} = \{a, b, c, x\}$ и построим $A_x^{(n+1)}$ с помощью $A_x^{(n)}$ для любого $n \in N$ следующим образом:

$$A_x^{(n+1)} = \{t \in A : t = y \wedge z \text{ или } t = y \vee z, y, z \in A_x^{(n)}\}.$$

Нетрудно заметить, что $A_x^{(n)} \subset A_x^{(n+1)}$. Также очевидно, что $A_x^{(n)} \subset A$ для любого n . С помощью индукции докажем, что $A_x^{(n)}$ удовлетворяет тождествам

$$a \wedge a = a, \quad a \vee a = a, \quad (1.6)$$

$$y \wedge z = z \wedge y, \quad y \vee z = z \vee y, \quad (1.7)$$

$$(y \wedge z) \wedge t = y \wedge (z \wedge t), \quad (y \vee z) \vee t = y \vee (z \vee t), \quad (1.8)$$

$$y \wedge (z \vee t) = (y \wedge z) \vee (y \wedge t), \quad y \vee (z \wedge t) = (y \vee z) \wedge (y \vee t), \quad (1.9)$$

$$(y \vee z) \wedge t = (y \wedge t) \vee (z \wedge t), \quad (y \wedge z) \vee t = (y \vee t) \wedge (z \vee t). \quad (1.10)$$

1 шаг.

Когда $n = 1$, $A_x^{(n)} = A_x^{(1)} = \{a, b, c, x\}$, очевидно, что $A_x^{(1)}$ удовлетворяет тождествам (1.6)–(1.10).

2 шаг.

Предположим, что $A_x^{(n)}$ удовлетворяет тождествам (1.6)–(1.10).

Докажем, что $A_x^{(n+1)}$ тоже удовлетворяет тождествам (1.6)–(1.10).

$A(\wedge, \vee)$ удовлетворяет тождествам (1.6) и (1.8)–(1.10), откуда следует, что $A_x^{(n+1)}$ тоже удовлетворяет тождествам (1.6) и (1.8)–(1.10). Нам остается доказать, что $A_x^{(n+1)}$ удовлетворяет тождеству (1.7).

Для любых $t_1, t_2 \in A_x^{(n+1)}$ существуют $y, z, u, v \in A_x^{(n)}$ такие, что имеет место один из следующих четырех случаев.

Первый случай – $t_1 = y \wedge z$ и $t_2 = u \wedge v$,

$$t_1 \wedge t_2 = (y \wedge z) \wedge (u \wedge v) = y \wedge z \wedge u \wedge v = (u \wedge v) \wedge (y \wedge z) = t_2 \wedge t_1,$$

$$\begin{aligned} t_1 \vee t_2 &= (y \wedge z) \vee (u \wedge v) = ((y \wedge z) \vee u) \wedge ((y \wedge z) \vee v) = \\ &= ((y \vee u) \wedge (z \vee u)) \wedge ((y \vee v) \wedge (z \vee v)) = ((u \vee y) \wedge (u \vee z)) \wedge ((v \vee y) \wedge (v \vee z)) = \\ &= (u \vee (y \wedge z)) \wedge (v \vee (y \wedge z)) = (u \wedge v) \vee (y \wedge z) = t_2 \vee t_1. \end{aligned}$$

Второй случай – $t_1 = y \wedge z$ и $t_2 = u \vee v$,

$$\begin{aligned} t_1 \wedge t_2 &= (y \wedge z) \wedge (u \vee v) = ((y \wedge z) \wedge u) \vee ((y \wedge z) \wedge v) = (u \wedge (y \wedge z)) \vee (v \wedge (y \wedge z)) = \\ &= (u \vee v) \wedge (y \wedge z) = t_2 \wedge t_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 \vee t_2 &= (y \wedge z) \vee (u \vee v) = (y \vee (u \vee v)) \wedge (z \vee (u \vee v)) = ((u \vee v) \vee y) \wedge ((u \vee v) \vee z) = \\ &= (u \vee v) \vee (y \wedge z) = t_2 \vee t_1. \end{aligned}$$

Третий и четвертый случаи, $t_1 = y \vee z$ и $t_2 = u \wedge v$, $t_1 = y \vee z$ и $t_2 = u \vee v$, получаются аналогично. То есть определено, что $A_x^{(n+1)}$ удовлетворяет тождествам (1.6)–(1.10).

Обозначим $A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_x^{(n)}$. Нетрудно заметить, что A_x тоже удовлетворяет тождествам (1.6)–(1.10) и закрыта относительно операций $\wedge, \vee$, т. е. будем иметь, что A_x из себя представляет подпрямо неразложимую дистрибутивную квазирешетку, следовательно, A_x изоморфна одному из алгебр Q, Q', Q'' (теорема 1), но поскольку $a, b, c \in A_x$ и a, b, c попарно не равны друг другу, следует, что $A_x \cong Q$. Следовательно, $x \in \{a, b, c\}$ и так как x есть любая из A , мы получаем, что $A \cong Q$.

Следствие 1.1. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая алгебра и удовлетворяет сверхтождествам

$$X(x, x) = x, \quad x \in A, X \in \{\wedge, \vee\}, \quad (1.11)$$

$$X(X(x, y), z) = X(x, X(y, z)), \quad x, y, z \in A, X \in \{\wedge, \vee\}, \quad (1.12)$$

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)), \quad x, y, z \in A, X \in \{\wedge, \vee\}, Y \in \{\wedge, \vee\} \setminus X, \quad (1.13)$$

$$X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)), \quad x, y, z \in A, X \in \{\wedge, \vee\}, Y \in \{\wedge, \vee\} \setminus X, \quad (1.14)$$

и $\exists a, b, c \in A$ попарно не равны друг другу и удовлетворяют тождеству

$$X(t, x) = X(x, t), \quad x \in A, t \in \{a, b, c\}, X \in \{\wedge, \vee\}. \quad (1.15)$$

Тогда если любая подалгебра алгебры $A(\wedge, \vee)$ подпрямо неразложима, то $A \cong Q$.

§2. Подпрямо неразложимые нормальные алгебры.

Определение 2.1. Алгебра $A(\wedge, \vee)$ называется полуквазирешеткой, если она удовлетворяет тождествам

$$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x, \quad (2.1)$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z. \quad (2.2)$$

Или на языке сверхтождеств

$$X(x, x) = x, \quad (2.1)'$$

$$X(X(x, y), z) = X(x, X(y, z)) \quad (2.2)'$$

Определение 2.2. Алгебра $A(\wedge, \vee)$ называется нормальной полуквазирешеткой, если она – полуквазирешетка и удовлетворяет тождествам

$$u \wedge x \wedge y \wedge v = u \wedge y \wedge x \wedge v, \quad u \vee x \vee y \vee v = u \vee y \vee x \vee v. \quad (2.3)$$

Или на языке сверхтождеств

$$X(u, X(x, X(y, v))) = X(u, X(y, X(x, v))) \quad (2.3)'$$

Определение 2.3. Алгебра $A(\wedge, \vee)$ называется дистрибутивной полуквазирешеткой, если она – полуквазирешетка и удовлетворяет тождествам

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad (2.4)$$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad (2.5)$$

Или на языке сверхтождеств

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)), \quad (2.4)'$$

$$X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)) \quad (2.5)'$$

Теорема 2.1. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая дистрибутивная, нормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет квазитожествам

$$(x = x \wedge y \wedge x \ \& \ y = y \wedge x \wedge y) \rightarrow x = y \text{ и } (x = x \vee y \vee x \ \& \ y = y \vee x \vee y) \rightarrow x = y, \quad (2.6)$$

тогда $A(\wedge, \vee)$ изоморфна одной из алгебр Q, Q', Q'' .

Лемма 2.1. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая дистрибутивная, нормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет квазитожествам (2.6) и $a \in A$, тогда

- (i) мы можем определить конгруенции L_a, P_a над $A(\wedge, \vee)$ так, что $xL_a y$ тогда и только тогда, если $u \wedge x \wedge a \wedge v = u \wedge y \wedge a \wedge v$, $u, v \in A$ и $xP_a y$ тогда и только тогда, если $u \vee x \vee a \vee v = u \vee y \vee a \vee v$, $u, v \in A$;
(ii) $L_a = 0$ тогда и только тогда, если $\exists I$ и $a = I$, $P_a = 0$ тогда и только тогда, если $\exists O$ и $a = O$.

Доказательство.

- (i) Сперва покажем, что L_a – конгруенция. Очевидно, что L_a – отношение эквивалентности, нам остается показать, что L_a удовлетворяет следующим условиям:

$$(xL_a y \ \& \ zL_a t) \rightarrow ((x \wedge z)L_a (y \wedge t) \ \& \ (z \wedge x)L_a (t \wedge y) \ \& \ (x \vee z)L_a (y \vee t) \ \& \ (z \vee x)L_a (t \vee y)).$$

Пусть $xL_a y$ и $zL_a t$, отсюда имеем $u \wedge x \wedge a \wedge v = u \wedge y \wedge a \wedge v$ и $u \wedge z \wedge a \wedge v = u \wedge t \wedge a \wedge v$, $u, v \in A$.

Поскольку u и v – любые элементы из A , то отсюда получаем

$$\begin{aligned} u \wedge (x \wedge z) \wedge a \wedge v &= (u \wedge x) \wedge z \wedge a \wedge v = (u \wedge x) \wedge t \wedge a \wedge v = u \wedge x \wedge t \wedge a \wedge v = \\ &= u \wedge x \wedge a \wedge (t \wedge v) = u \wedge (y \wedge t) \wedge a \wedge v \rightarrow (x \wedge z)L_a (y \wedge t); \\ u \wedge (x \vee z) \wedge a \wedge v &= ((u \wedge x) \vee (u \wedge z)) \wedge (a \wedge v) = ((u \wedge x) \wedge (a \wedge v)) \vee ((u \wedge z) \wedge (a \wedge v)) = \\ &= (u \wedge x \wedge a \wedge v) \vee (u \wedge z \wedge a \wedge v) = (u \wedge y \wedge a \wedge v) \vee (u \wedge t \wedge a \wedge v) = u \wedge (y \vee t) \wedge a \wedge v \rightarrow \\ &\rightarrow (x \vee z)L_a (y \vee t). \end{aligned}$$

Подобным образом доказывается, что $(z \wedge x)L_a (t \wedge y)$ и $(z \vee x)L_a (t \vee y)$.

Аналогичным способом получается, что P_a – конгруенция.

- (ii) **Необходимость.** Пусть $L_a = 0$, тогда

$$\begin{aligned} u \wedge x \wedge a \wedge a \wedge v &= u \wedge x \wedge a \wedge v, \quad u, v \in A \text{ и} \\ u \wedge a \wedge x \wedge a \wedge v &= u \wedge x \wedge a \wedge v, \quad u, v \in A; \\ u \wedge x \wedge a \wedge a \wedge v &= u \wedge x \wedge a \wedge v, \quad u, v \in A \rightarrow x \wedge a = x, \\ u \wedge a \wedge x \wedge a \wedge v &= u \wedge x \wedge a \wedge v, \quad u, v \in A \rightarrow a \wedge x = x, \end{aligned}$$

и имеем, что $x \wedge a = a \wedge x = x \rightarrow a = I$.

Достаточность очевидна. Таким же способом доказывается, что $P_a = 0$ тогда и только тогда, когда $\exists O$ и $a = O$.

Лемма 2.2. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая дистрибутивная, нормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет квазитождествам (2.6), тогда в $A(\wedge, \vee)$ существуют O и I .

Доказательство. Пусть $L = \bigcap_{a \in A} L_a$, тогда если xLy , то следует, что $xL_x y$ и $xL_y y$, отсюда имеем $u \wedge x \wedge x \wedge v = u \wedge y \wedge x \wedge v$ и $u \wedge x \wedge u \wedge v = u \wedge y \wedge u \wedge v$; когда берем $u = v = x$, то получаем $x = x \wedge y \wedge x$, а когда $u = v = y$, то $y = y \wedge x \wedge y$, отсюда получаем, что $x = y$, следовательно, $L = 0$, но поскольку $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая, то имеем $\exists a \in A$ такое, что $L_a = 0$, и из леммы 2.1 получаем $a = I$. Аналогичным способом получим $O \in A$.

Из леммы 2.2 следует, что $A(\wedge, \vee)$ удовлетворяет тождествам $x \wedge y = y \wedge x$ и $x \vee y = y \vee x$. Отсюда из лемм 2.1 и 2.2 и из теоремы 1 вытекает доказательство теоремы 2.1.

Следствие 2.1. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая дистрибутивная, нормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет квазитождествам $(x = X(x, X(y, x)) \& y = X(y, X(y, x))) \rightarrow x = y$, тогда $A(\wedge, \vee)$ изоморфна одному из алгебр Q, Q', Q'' .

Теорема 2.2. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – дистрибутивная, нормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет тождествам $x \wedge u \wedge x = u \wedge x \wedge u$, $x \vee u \vee x = u \vee x \vee u$, тогда $A(\wedge, \vee)$ изоморфна подпрямой сумме алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' .

Доказательство. Из тождеств $x \wedge u \wedge x = u \wedge x \wedge u$, $x \vee u \vee x = u \vee x \vee u$ вытекают квазитождества $(x = x \wedge u \wedge x \& u = u \wedge x \wedge u) \rightarrow x = u$, $(x = x \vee u \vee x \& u = u \vee x \vee u) \rightarrow x = u$. Следовательно, из теоремы 2.1 имеем, что подпрямо неразложимые алгебры, удовлетворяющие условиям теоремы 2.2, есть алгебры, изоморфные алгебрам Q, Q', Q'' . Отсюда, по теореме Биркгофа, получаем, что $A(\wedge, \vee)$ изоморфна подпрямой сумме алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' .

Следствие 2.2. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – дистрибутивная, нормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет сверхтождеству $X(x, X(y, x)) = X(y, X(x, y))$, тогда $A(\wedge, \vee)$ изоморфна подпрямой сумме алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' .

Интересно, можно ли дистрибутивную, нормальную полуквазирешетку, которая удовлетворяет квазитождествам (2.6), представить в виде подпрямой суммы алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' ?

§3. Подпрямо неразложимые нормальные алгебры.

Определение 3.1. Алгебра $A(\wedge, \vee)$ называется квазинормальной полуквазирешеткой, если $A(\wedge, \vee)$ – полуквазирешетка и $A(\wedge, \vee)$ удовлетворяет тождествам

$$u \wedge (x \vee y) \wedge v = u \wedge (y \vee x) \wedge v, \quad u \vee (x \wedge y) \vee v = u \vee (y \wedge x) \vee v. \quad (3.1)$$

Или на языке свертотждеств

$$X(u, X(Y(x, y), v)) = X(u, X(Y(y, x), v)), \quad u, x, y, v \in A, X \in \{\wedge, \vee\}, Y \in \{\wedge, \vee\} \setminus X. \quad (3.1)'$$

Теорема 3.1. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая дистрибутивная, квазинормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет квазитождествам

$$\begin{aligned} (x = (x \wedge y \wedge x) \vee x \ \& \ y = (y \wedge x \wedge y) \vee y) \rightarrow x = y \text{ и} \\ (x = (x \vee y \vee x) \wedge x \ \& \ y = (y \vee x \vee y) \wedge y) \rightarrow x = y, \end{aligned} \quad (3.2)$$

тогда $A(\wedge, \vee)$ изоморфна одному из алгебр Q, Q', Q'' .

Лемма 3.1. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямо неразложимая дистрибутивная квазинормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет квазитождествам (3.2) и $a \in A$, тогда

- (i) мы можем определить конгруенции M_a, N_a над $A(\wedge, \vee)$ так, что $xM_a y$ тогда и только тогда, если $u \vee (x \wedge a) \vee v = u \vee (y \wedge a) \vee v$, $u, v \in A$ и $xN_a y$ тогда и только тогда, если $u \wedge (x \vee a) \wedge v = u \wedge (y \vee a) \wedge v$, $u, v \in A$;
- (ii) из $M_a = 0$ следует, что $\exists I$ и $a = I$, а из $N_a = 0$ следует, что $\exists O$ и $a = O$.

Доказательство.

- (i) Сперва покажем, что M_a – конгруенция. Очевидно, что M_a – отношение эквивалентности, нам остается показать, что M_a удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} (xM_a y \ \& \ zM_a t) \rightarrow \\ \rightarrow ((x \wedge z)M_a (y \wedge t) \ \& \ (z \wedge x)M_a (t \wedge y) \ \& \ (x \vee z)M_a (y \vee t) \ \& \ (z \vee x)M_a (t \vee y)). \end{aligned}$$

Поскольку u и v – любые элементы из A , то отсюда имеем

$$\begin{aligned} u \vee (x \wedge z \wedge a) \vee v &= u \vee (x \wedge a \wedge z \wedge a) \vee v = ((u \vee (x \wedge a)) \wedge (u \vee (z \wedge a))) \vee v = \\ &= (u \vee (x \wedge a) \vee v) \wedge (u \vee (z \wedge a) \vee v) = (u \vee (y \wedge a) \vee v) \wedge (u \vee (t \wedge a) \vee v) = \\ &= u \vee (y \wedge t \wedge a) \vee v \rightarrow (x \wedge z)M_a (y \wedge t); \\ u \vee ((x \vee z) \wedge a) \vee v &= u \vee (x \wedge a) \vee (z \wedge a) \vee v = (u \vee (x \wedge a)) \vee (z \wedge a) \vee v = \\ &= (u \vee (x \wedge a)) \vee (t \wedge a) \vee v = u \vee (y \wedge a) \vee ((t \wedge a) \vee v) = u \vee (y \wedge a) \vee (t \wedge a) \vee v = \\ &= u \vee ((y \vee t) \wedge a) \vee v \rightarrow (x \vee z)M_a (y \vee t). \end{aligned}$$

Подобным образом доказывается, что $(z \wedge x)M_a (t \wedge y)$ и $(z \vee x)M_a (t \vee y)$. Аналогичным способом получается, что N_a – конгруенция.

- (ii) Пусть $M_a = 0$, тогда

$$\begin{aligned} u \vee (x \wedge a \wedge a) \vee v &= u \vee (x \wedge a) \vee v, \quad u, v \in A \text{ и} \\ u \vee (a \wedge x \wedge a) \vee v &= u \vee (x \wedge a) \vee v, \quad u, v \in A; \\ u \vee (x \wedge a \wedge a) \vee v &= u \vee (x \wedge a) \vee v, \quad u, v \in A \rightarrow x \wedge a = x, \\ u \vee (a \wedge x \wedge a) \vee v &= u \vee (x \wedge a) \vee v, \quad u, v \in A \rightarrow a \wedge x = x, \end{aligned}$$

отсюда имеем, что $x \wedge a = a \wedge x = x \rightarrow a = I$. Аналогичным способом доказывается – из $N_a = 0$ следует, что $\exists O$ и $a = O$.

Лемма 3.2. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямая неразложимая дистрибутивная, квазинормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет квазитожествам (3.2), тогда в $A(\wedge, \vee)$ существуют O и I .

Доказательство. Пусть $M = \bigcap_{a \in A} M_a$, тогда если xMu , то следует, что $xM_x u$ и $xM_y u$, отсюда имеем $u \vee (x \wedge x) \vee v = u \vee (y \wedge x) \vee v$ и $u \vee (x \wedge y) \vee v = u \vee (y \wedge y) \vee v$; когда берем $u = v = x$, то получаем $x = x \vee (y \wedge x) \vee x$, а когда $u = v = y$, то $x = y \vee (x \wedge y) \vee y$, отсюда получаем, что $x = y$, следовательно, $M = 0$, но поскольку $A(\wedge, \vee)$ – подпрямая неразложимая, то имеем, $\exists a \in A$ такое, что $M_a = 0$ и из леммы 3.1 имеем $a = I$. Аналогичным способом получается $O \in A$.

Из леммы 3.2 следует, что $A(\wedge, \vee)$ удовлетворяет тождествам $x \wedge y = y \wedge x$ и $x \vee y = y \vee x$. Отсюда из лемм 3.1 и 3.2 и из теоремы 1 вытекает доказательство теоремы 3.1.

Следствие 3.1. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – подпрямая неразложимая дистрибутивная, квазинормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет квазитожествам $(x = Y(X(x, X(y, x)), x) \& y = Y(X(y, X(x, y)), y)) \rightarrow x = y$, $x, y \in A, X \in \{\wedge, \vee\}, Y \in \{\wedge, \vee\} \setminus X$, тогда $A(\wedge, \vee)$ изоморфна одному из алгебр Q, Q', Q'' .

Теорема 3.2. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – дистрибутивная квазинормальная полуквазирешетка, которая удовлетворяет тождествам

$$(x \wedge y \wedge x) \vee x = (y \wedge x \wedge y) \vee y \text{ и } (x \vee y \vee x) \wedge x = (y \vee x \vee y) \wedge y, \quad (3.3)$$

тогда $A(\wedge, \vee)$ изоморфна подпрямой сумме алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' .

Доказательство. Из тождества (3.3) вытекают квазитожества (3.2). Следовательно, из теоремы 3.1 имеем, что подпрямая неразложимая алгебра, удовлетворяющая условиям теоремы 3.2, есть алгебра, изоморфная алгебрам Q, Q', Q'' . Отсюда, по теореме Биркгофа, получаем, что $A(\wedge, \vee)$ изоморфна подпрямой сумме алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' .

Следствие 3.2. Пусть $A(\wedge, \vee)$ – дистрибутивная, квазинормальная квазиполурешетка, которая удовлетворяет сверхтождеству

$$Y(X(x, X(y, x)), x) = Y(X(y, X(x, y)), y), \quad x, y \in A, X \in \{\wedge, \vee\}, Y \in \{\wedge, \vee\} \setminus X,$$

тогда $A(\wedge, \vee)$ изоморфна подпрямой сумме алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' .

Остается открытым вопрос, можно ли дистрибутивную, квазинормальную квазиполурешетку, которая удовлетворяет квазитожествам (3.2), представить в виде подпрямой суммы алгебр, изоморфных алгебрам Q, Q', Q'' ?

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman J.A. – Fund. Math., 1971. v. 71, p. 161–163.
2. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1974.
3. Мовсисян Ю.М. – УМН, 1998, № 1, с. 61–115.
4. Мовсисян Ю.М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1986.

Վ.Հ. ՏՈԳՆՅԱՆ

ԵՆԹԱՈՒԴԻՂ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ ՉՈՒՆԵՑՈՂ ՄԱՄՆԱԿԻ ՏԵՂԱԲՈՒԽԱԿԱՆ, ՆՈՐՄԱԼ ԵՎ ԶՎԱԶԻՆՈՐՄԱԼ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող մասնակի տեղափոխական, նորմալ և քվազինորմալ հանրահաշիվներ: Ապացուցվում է, որ այդպիսի հանրահաշիվների հենքային բազմության հզորությունը ≤ 3 :

V.H. TOGHANYAN

SUBDIRECT INDECOMPOSABLE PARTIALLY COMMUTATIVE, NORMAL AND QUASI NORMAL ALGEBRAS

Summary

In this paper are studied subdirect indecomposable, partially commutative, normal and quasinormal algebras. It is proved that the cardinality of base set ≤ 3 .