

УДК 518.519

И.Э. ДАНИЕЛЯН

О ХВОСТЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Найдены условия правильного изменения хвоста распределения суммы случайного числа независимых случайных величин. Предполагается, что случайный индекс не зависит от слагаемых.

1⁰. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых случайных величин; $\nu > 0$ – не зависящий от $\{\xi_n\}$ случайный индекс с распределением $\{c_n\}$;
 $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$, $S_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu$, $\bar{S}_\nu = \sup_{1 \leq k \leq \nu} S_k$;

$$C(t) = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^n P(\xi_k \geq t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где P – знак вероятности,

$$T(t) = P(S_\nu \geq t), \quad V(t) = P(\bar{S}_\nu \geq t).$$

Цель настоящего сообщения заключается в нахождении условий, при которых справедливы асимптотические соотношения

$$V(t) \sim T(t) \sim C(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Запись $f(t) \sim g(t)$, $t \rightarrow +\infty$, означает, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)/g(t)) = 1$. ►

2⁰. *Определение [1]. Измеримая на $(0, +\infty)$ функция $R(t)$ вида $R(t) = t^\alpha \cdot L(t)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, правильно меняется при $t \rightarrow +\infty$, если для любого $x > 0$*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (L(xt)/L(t)) = 1.$$

Отсутствие предположения о правильном изменении $C(t)$ может нарушить соотношение (2), что подтверждает следующий пример.

Пример. Пусть $P(\nu = 2) = 1$, случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют функцию распределения $1 - \exp(-x)$ при $x > 0$ и 0 при $x \leq 0$. Тогда

$$P(S_2 \geq t) = P(\bar{S}_2 \geq t) = (1+t)\exp(-t), \quad t > 0,$$

и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(S_2 \geq t) / P(\xi_1 \geq t)) = +\infty.$$

В частности, в силу (2) сходимость ряда (1) при больших t необходима для справедливости (2), что равносильно условию $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$.

Утверждения типа (2) ранее получены при таком правильном изменении вероятностей $P(\xi_k \geq t)$, $k \geq 1$, при котором функция $C(t)$ оказывается правильно меняющейся (см., напр., [2-4]). ►

3°. При $n \geq 1$ и $t \geq 0$ обозначим

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \sum_{m=1}^k P(\xi_m \geq t), \quad C_{>n}(t) = \sum_{k>n} c_k \cdot \sum_{m=1}^k P(\xi_m \geq t)$$

и введем следующее условие.

Условие А. Ряд (1) сходится при больших t , и в области его сходимости имеет место равномерная по t сходимость

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_n(t) / C(t)) = 1.$$

Условие А равносильно следующему условию. Существует $t_0 > 0$, и для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется целое $n_0 > 1$ (независимое от $t \in [t_0, +\infty)$), такое, что при всех $n \geq n_0$ и $t \geq t_0$

$$C_{>n}(t) \leq \varepsilon \cdot C(t) < +\infty.$$

Сформулируем основной результат сообщения.

Теорема. Пусть выполнено условие А. Тогда правильное изменение одной из функций $V(t), T(t), C(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ влечет за собой правильное изменение остальных двух и выполнение асимптотических соотношений (2).

Метод доказательства теоремы основан на двухсторонних оценках, как и в работе [4]. При этом развита одна идея В. Феллера [5], с. 319-320. ►

4°. Приведем полученные нами и использованные при установлении теоремы вспомогательные утверждения.

Пусть при $n \geq 1$ и $t > 0$

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot P(S_k \geq t), \quad V_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot P(\max_{1 \leq i \leq k} S_i \geq t)$$

и запись $f(t) \asymp g(t)$ ниже обозначает, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} (g(t) / f(t)) \geq 1$.

Лемма 1. а) Из условия

$$t^{-\alpha} \cdot L(t) \asymp T_n(t) \asymp t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

следует

$$a^{-1} t^{-\alpha} \cdot L(t) \asymp C_n(t) \asymp a \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty;$$

б) из условия

$$a^{-1} t^{-\alpha} \cdot L(t) \asymp C_n(t) \asymp t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

следует

$$a^{-1} t^{-\alpha} \cdot L(t) \asymp T_n(t) \asymp a \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty;$$

թ) в пунктах а) и б) $T_n(t)$ можно заменить функцией $V_n(t)$. Здесь $a \geq 1$ и $\alpha \geq 0$ произвольны.

Лемма 2.

а) Если $C(t) \asymp t^{-a} \cdot L(t)$ при некотором $a \geq 0$ и $t \rightarrow +\infty$, то

$$T(t) \asymp 2 \cdot t^{-a} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \text{и} \quad V(t) \asymp 2 \cdot t^{-a} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty;$$

б) $C(t) \asymp T(t) \asymp V(t)$, $t \rightarrow +\infty$. ►

Кафедра теории вероятностей и
математической статистики

Поступило 13.01.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
2. Stam A.J. – Adv. Appl. Prob., 1973, № 5, p. 308–327.
3. Greenwood P. – Ann. Prob., 1973, № 1, p. 317–321.
4. Аракелян А.З., Данияелян Э.А. – Ученые записки ЕГУ, 2000, № 2, с. 24–35.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984, т. 2.

Ի.Է. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԹՎՈՎ ԱՆԿԱՆ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԳՈՒՄԱՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՊՈՉԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Գտնված են պատահական թվով անկախ պատահական մեծությունների գումարի բաշխման պոչի կանոնավոր փոփոխման պայմանները: Ենթադրվում է, որ պատահական ինդեքսը կախված չէ գումարելիներից:

I.E. DANIELYAN

ON THE DISTRIBUTION TAIL OF A SUM OF RANDOM NUMBER OF
INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

Summary

Regular variation conditions for distribution tail of a sum of random number of independent random variables are established. It is assumed that the random index does not depend on the summands.