

Математика

УДК 517.51

Տ.Ա. ԱԿՈՅԱՆ

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ С ОБРАЩАЮЩИМИ
ФУНКЦИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ КОМПЛЕКСНЫЕ КОРНИ

Обращаются преобразования типа свертки с ядрами вида $G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{st}}{E(s)} ds$ в классе функций $L^2(-\infty, +\infty)$, когда обращающие функции имеют комплексные корни, удовлетворяющие условиям $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|a_i|^2} < +\infty$, $|\arg a_i| \leq \frac{\pi}{4}$.

Преобразования типа свертки

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t)\varphi(t)dt, \quad (1)$$

где ядро $G(t)$ определяется формулой

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{st}}{E(s)} ds, \quad (2)$$

обстоятельно исследованы многими специалистами для широких классов функций $E(s)$. В частности, в монографии Хиршмана и Уиддера [1] приведены их результаты для класса функции Лагерра–Пойа. Далее они, а также др. авторы [2] изучили такие преобразования типа свертки, при которых функция $E(s)$ имеет комплексные корни. Остановимся на одном из результатов.

Пусть обращающая функция $E(s)$ имеет вид

$$E(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{a_k^2}\right). \quad (3)$$

Функция $E(s)$ относится к классу A , если последовательность $\{a_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2} < +\infty, \quad |\arg a_k| \leq \frac{\pi}{4} - \eta$$

для некоторого $\eta \left(0 < \eta < \frac{\pi}{4} \right)$. Предлагается, что a_k расположены в порядке неубывания их вещественных частей и $\operatorname{Re} a_1 > 0$.

Теорема А (Даунс, Уиддер). Если для $-\infty < t < +\infty$

$$1) \quad G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{st}}{E(s)} ds, \quad E(s) \in A,$$

2) функция $\varphi(t)$ ограничена на компактных множествах и

$$\varphi(t) = O(e^{\sigma|t|}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad 0 < \sigma < \operatorname{Re} a_1,$$

то преобразование (1) обращается формулой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D^2}{a_k^2} \right) f(x) = \varphi(x) \quad \left(D \equiv \frac{d}{dx} \right)$$

в каждой точке $t = x$ непрерывности функции $\varphi(t)$.

В [2] доказана также аналогичная теорема в условиях, когда $\varphi(t) \in L$ на каждом конечном интервале и $\int_0^t \varphi(u) du = O(e^{\sigma|t|}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad 0 < \sigma < \operatorname{Re} a_1$.

В этой же работе высказывается мысль о том, что утверждение теоремы, быть может, остается в силе и тогда, когда корни a_k находятся в угле с точным раствором $\frac{\pi}{2}$, так как для ядер $E(s)$ частного вида доказано, что это действительно справедливо (см. [2]).

В настоящем сообщении мы показываем, что такой же результат при $|\arg a_k| \leq \frac{\pi}{4}$ справедлив для функций $\varphi(t)$ из класса $L^2(-\infty, +\infty)$. Прежде чем привести формулировку нашей теоремы, дадим некоторые определения.

Определенная на $(-\infty, +\infty)$ функция $\Psi(t)$ принадлежит классу P , если

а) $\Psi(t)$ непрерывна и отлична от нуля на $(-\infty, +\infty)$,

б) существуют последовательность полиномов $\{Q_n(t)\}_1^\infty$ и число $M > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} |Q_n(t)| &\leq M |\Psi(t)| \quad (-\infty < t < +\infty), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(t) &= \Psi(t) \end{aligned} \quad (4)$$

в каждой точке $t \in (-\infty, +\infty)$.

Если $\Psi(t) = Q_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ — полином степени n , то функцию f отнесем к классу $L_2^{(\Psi)}(-\infty, +\infty)$ в том случае, когда $f(x)$ n -раз дифференци-

руема и $f^{(k)}(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), причем для любой функции $f(x) \in L_2^{(\Psi)}(-\infty, +\infty)$ полагаем

$$\Psi(\pm iD)f(x) := Q_n(\pm iD)f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (\pm iD)^k f(x) \quad \left(D \equiv \frac{d}{dx} \right).$$

Если же $\Psi(t) \in P$ отлична от полинома, то $f(x)$ отнесем к классу $L_2^{(\Psi)}(-\infty, +\infty)$, когда выполняются следующие условия:

1) $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$, причем

$$f^{(k)}(x) \in L_2(-\infty, +\infty), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

2) для некоторой последовательности полиномов $\{Q_n(t)\}$, удовлетворяющих условиям (4), существует на $(-\infty, +\infty)$ предел в среднем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\pm iD)f(x) := \Psi(\pm iD)f(x).$$

Нами была доказана теорема о преобразованиях типа свертки [3–5], специальный частный случай которой приводится ниже.

Теорема Б. Пусть на вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ определены функции $K(t)$ и $\Psi_1(t), \Psi_2(t) \in P$, связанные между собой соотношением $K(t)\Psi_1(-t)\Psi_2(t) = 1$ ($-\infty < t < +\infty$) и подчиненные условию $\sup_{-\infty < t < +\infty} |K(t)\Psi_2(t)| < +\infty$.

Если $\Omega(x) := \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} \frac{K(t)}{1/2 - it} e^{-itx} dt$, то для любой функции

$$\varphi(x) \in L_2^{(\Psi_1)}(-\infty, +\infty) \quad \text{формула} \quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left\{ e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x-t) \Psi_1(-iD) \varphi(t) dt \right\}$$

определяет почти всюду (всюду, если $\Psi_2(t) \neq \text{const}$) на $(-\infty, +\infty)$ функцию $f(x) \in L_2^{(\Psi_2)}(-\infty, +\infty)$.

Почти всюду (всюду, если $\Psi_1(t) \neq \text{const}$) на $(-\infty, +\infty)$ имеет место формула $\varphi(x) = \Psi_2(iD)f(x)$ (см. [5], с. 108).

В этой теореме положим $\Psi_1(t) \equiv 1$, $\Psi_2(t) = \frac{1}{K(t)} = E(-it)$, где $E(s)$ имеет вид (3), и относительно последовательности $\{a_k\}$ предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2} < +\infty, \quad |\arg a_k| \leq \frac{\pi}{4}. \quad (5)$$

Тогда функция $E(-it) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{a_k^2} \right)$ принадлежит классу P . Действительно,

ввиду того, что $|\operatorname{Re} a_k| \geq |\operatorname{Im} a_k|$, имеем

$$\left| 1 + \frac{t^2}{a_k^2} \right| = \frac{1}{|a_k|^2} \sqrt{t^4 + 2t^2((\operatorname{Re} a_k)^2 - (\operatorname{Im} a_k)^2) + |a_k|^4} \geq 1, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Функция $E(-it)$ непрерывна и отлична от нуля на $(-\infty, +\infty)$, и если $Q_n(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{t^2}{a_k^2}\right)$ ($n=1, 2, \dots$), то $|Q_n(t)| \leq |Q_{n+1}(t)| \leq \dots \leq E(-it)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(t) = E(-it)$ ($-\infty < t < +\infty$), т. е. $E(-it) \in P$.

Согласно теореме Б, для любой функции $\varphi(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$ формула

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \frac{d}{dx} \left\{ e^{\frac{x}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x-t) \varphi(t) dt \right\}$$

всюду на $(-\infty, +\infty)$ определяет $f(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$. На $(-\infty, +\infty)$ почти всюду имеет место равенство

$$\varphi(x) = \Psi_2(iD)f(x) := E(D)f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D^2}{a_k^2}\right) f(x).$$

Но если обозначить

$$G(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{E(-it)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{sx}}{E(s)} ds$$

и принять во внимание равенство

$$\frac{d}{dx} \left\{ e^{\frac{x}{2}} \Omega(x-t) \right\} = e^{\frac{x}{2}} G(x-t),$$

то приходим к следующей теореме.

Теорема. Если $\varphi(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$, то преобразование типа свертки

$$(1), \text{ где } G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{sx}}{E(s)} ds, \quad E(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{a_k^2}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2} < +\infty, \quad |\arg a_k| \leq \frac{\pi}{4}$$

($k=1, 2, \dots$), обращается формулой $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D^2}{a_k^2}\right) f(x)$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$.

Кафедра высшей математики
радиофизического факультета

Поступила 24.09.2002

ЛИТЕРАТУРА

1. Хиршман И.И., Ундлер Д.М. Преобразования типа свертки. М., 1958.
2. Dauns Y. and Widder D.M. – Pacific Journal of Math., 1965, v. 15, № 2, p. 427–442.
3. Акопян С.А. – Изв.АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 1960, т. 13, № 1, с. 3–27.
4. Акопян С.А. V всесоюзная конференция по теории функций. Тезисы докладов. Ер., 1960, с. 9–10.
5. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.

ՓԱԹՈՒՅԹԻ ՏԻՊԻ ՉԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ, ՈՐՈՆՑ
ՇՐՋՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՆ ՈՒՆԵՆ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՐՄԱՏՆԵՐ

Ամփոփում

$L^2(-\infty, +\infty)$ դասի ֆունկցիաների համար փաթույթի տիպի ձևափոխությունները շրջվում են այն դեպքում, երբ $E(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{a_k^2}\right)$ շրջող ֆունկցիաներն ունեն կոմպլեքս արմատներ, որոնք բավարարում են $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2} < +\infty$, $|\arg a_k| \leq \frac{\pi}{4}$ պայմաններին:

S.A. HAKOBIAN

ON CONVOLUTION TRANSFORMS WHOSE INVERSION FUNCTIONS
HAVE COMPLEX ROOTS

Summary

For convolution transforms it has been received inversion formula, when $\varphi(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$ and inversion functions $E(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{a_k^2}\right)$ have complex roots satisfying to conditions $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2} < +\infty$, $|\arg a_k| \leq \frac{\pi}{4}$.