ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2003 Естественные науки

Математика

УДК 517.984

А.Г. ПЕТРОСЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПОВЕДЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Рассматривается в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ обыкновенный линейный самосопряженный дифференциальный оператор порядка $m \geq 2$, коэффициенты которого имеют определенные поведения на бесконечности. Исследуется точечный спектр этого оператора. В частности, доказываются ограниченность точечного спектра и конечность множества его предельных точек.

Пусть l – дифференциальная операция порядка $m \geq 2$, заданная формальным выражением

$$l(y)=\frac{1}{i^m}y^{(m)}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{i^{2k}}\left(p_{2k}y^{(k)}\right)^{(k)}+\sum_{k=0}^{n'-1}\frac{1}{2i^{2k+1}}\left\{\left(p_{2k+1}y^{(k)}\right)^{(k+1)}+\left(p_{2k+1}y^{(k+1)}\right)^{(k)}\right\},\quad(1)$$

где y – функция, определенная на $\mathbb{R}$, i – мнимая единица, $n=\left[\frac{m}{2}\right]$, $n'=\left[\frac{m-1}{2}\right]$, а коэффициенты p_k – вещественные измеримые функции на $\mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\infty}^{0}\left|p_k(x)-a_k^-\right|dx+\int_{0}^{\infty}\left|p_k(x)-a_k^+\right|dx<\infty,\qquad k=0,1,\ldots,m-2,\qquad(2)$$

с некоторыми вещественными числами $a_k^{\pm}$. Точный смысл выражения (1) описывается при помощи квазипроизводных $y^{[\nu]}$, $\nu=0,1,\ldots,m$, функции y, соответствующих коэффициентам p_k, $k=0,1,\ldots,m-2$, и определяемых по формулам

$$y^{[0]}=y,$$

$$y^{[k]}=\frac{1}{i^k}y^{(k)}=\frac{1}{i^k}\frac{d^k y}{dx^k},\qquad k=1,2,\ldots,n,$$

$$y^{[n+1]}=\frac{1}{2}p_{2n'-1}y^{[n'-1]}+p_{2n'}y^{[n']}+\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\left(y^{[n]}\right),$$

$$y^{[m-k]}=\frac{1}{2}p_{2k-1}y^{[k-1]}+p_{2k}y^{[k]}+\frac{1}{2}p_{2k+1}y^{[k+1]}+\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\left(y^{[m-1-k]}\right),\quad k=1,2,\ldots,n'-1,$$

$$y^{[m]}=p_0y^{[0]}+\frac{1}{2}p_1y^{[1]}+\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\left(y^{[m-1]}\right),$$

где $p_{m-1}=0$. Считается, что выражение (1) имеет смысл (т. е. операция l применима к функции y), если все квазипроизводные функции y до порядка $m-1$ включительно существуют и абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке вещественной оси. При этом полагается $l(y)=y^{[m]}$.

Действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор $\mathcal{L}$ определим следующим образом. Область определения $\mathcal{D}$ оператора $\mathcal{L}$ есть множество всех таких функций $y\in L^2(\mathbb{R})$, к которым применима операция l, а $l(y)\in L^2(\mathbb{R})$. Для $y\in\mathcal{D}$ полагаем $\mathcal{L}y=l(y)$. Как будет показано ниже, оператор $\mathcal{L}$ является самосопряженным.

Для доказательства самосопряженности оператора $\mathcal{L}$ и для исследования его точечного спектра используются решения дифференциального уравнения $l(y)=\mu y$ с параметром $\mu\in\mathbb{C}$, обладающие определенными поведениями на бесконечности. Методы получения фундаментальной системы решений этого уравнения с определенными асимптотиками хорошо известны (см. [1]). Однако здесь необходимо существование решений, обладающих некоторыми дополнительными свойствами. Такие решения используются также при исследовании непрерывного спектра оператора $\mathcal{L}$ и выводе разложения Фурье посредством минимальной системы обобщенных собственных функций оператора $\mathcal{L}$ (этим вопросам будет посвящена отдельная статья). Отметим, что подобное исследование проведено в [2] в случае, когда в условиях (2) $a_k^{\pm}=0$, $k=0,1,\ldots,m-2$.

Пусть y и z – функции на $\mathbb{R}$, к которым применима операция l. Обозначим

$$[y,z]_x=[y(x),z(x)]=\sum_{\nu=0}^{m-1}y^{[m-1-\nu]}(x)\overline{z^{[\nu]}(x)}.\qquad(3)$$

Тогда для любого отрезка $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ справедлива формула Лагранжа:

$$\int_\alpha^\beta l(y(x))\overline{z(x)}\,dx-\int_\alpha^\beta y(x)\overline{l(z(x))}\,dx=i[y,z]_\alpha-i[y,z]_\beta.\qquad(4)$$

Заметим, что если $y(x,\mu)$ и $z(x,\overline{\mu})$ – решения дифференциальных уравнений $l(y)=\mu y$ и $l(z)=\overline{\mu}z$ соответственно, где μ – некоторое комплексное число, то, как следует из формулы (4), выражение $[y(x,\mu),z(x,\overline{\mu})]$ является постоянной величиной относительно $x\in\mathbb{R}$.

Вместе с l рассмотрим дифференциальные операции l^+ и l^-, определенные равенствами $l^{\pm}(y)=\frac{1}{i^m}y^{(m)}+\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{i^k}a_k^{\pm}y^{(k)}$, где числа a_k^+ и a_k^- те же, что и в условиях (2). Квазипроизводные функции y, соответствующие коэффициентам $a_k^{\pm}$, $k=0,1,\dots,m-2$, обозначим через $y^{[\nu]\pm}$, $\nu=0,1,\dots,m$. Введем также обозначения $[y,z]_x^{\pm}=[y(x),z(x)]^{\pm}=\sum_{\nu=0}^{m-1}y^{[m-1-\nu]\pm}(x)\,\overline{z^{[\nu]\pm}(x)}$ и многочлены Q^+, Q^- относительно $\lambda\in\mathbb{C}$, определенные равенствами $Q^{\pm}(\lambda)=\lambda^m+\sum_{k=0}^{m-2}a_k^{\pm}\lambda^k$. Легко проверить, что если числа λ^+ и λ^- – соответственно корни уравнений $Q^+(\lambda)=\mu$ и $Q^-(\lambda)=\mu$ с некоторым $\mu\in\mathbb{C}$, то функции $e^{ix\lambda^+}$ и $e^{ix\lambda^-}$ ($x\in\mathbb{R}$) – соответственно решения дифференциальных уравнений $l^+(y)=\mu y$ и $l^-(y)=\mu y$.

Обозначим через E множество таких $\mu\in\mathbb{C}$, для которых уравнение $Q^+(\lambda)=\mu$ или $Q^-(\lambda)=\mu$ имеет комплексные кратные корни. Ясно, что число точек множества E не превышает $2m-2$. Пусть $æ'$ – число точек множества $E\bigcap\mathbb{R}$. При $æ'\neq 0$ эти точки обозначим через $\mu_1'<\mu_2'<\dots<\mu_{æ'}'$. Пусть, кроме того, $æ$ – число тех значений $\mu\in E\bigcap\mathbb{R}$, для которых одно из указанных уравнений имеет вещественные кратные корни. При $æ\neq 0$ эти значения обозначим через $\mu_1<\mu_2<\dots<\mu_{æ}$. Положим также $\mu_0=\mu_0'=-\infty$ и $\mu_{æ+1}=\mu_{æ'+1}'=\infty$. Ясно, что $æ\le æ'$, причем $æ\ge 1$ в случае четного m. Для каждого $\mu\in\mathbb{C}$ корни уравнения $Q^{\pm}(\lambda)=\mu$ с учетом их кратностей обозначим через $\lambda_j^{\pm}(\mu)$, $j=0,1,\dots,m-1$. Заметим, что для каждой односвязной открытой области $G\subset\mathbb{C}\setminus E$ эти корни можно пронумеровать так, чтобы каждый из них был аналитической функцией от $\mu\in G$. Производные функций $Q^{\pm}$ и $\lambda_j^{\pm}$ обозначим через $Q'^{\pm}$ и $\lambda_j'^{\pm}$. Легко убедиться, что $Q'^{\pm}(\lambda_j^{\pm}(\mu))=(\lambda_j'^{\pm}(\mu))^{-1}$. Для каждого $\mu\in\mathbb{R}$ число вещественных корней уравнения $Q^{\pm}(\lambda)=\mu$ с учетом их кратностей обозначим через $r^{\pm}(\mu)$ и заметим, что оно, как функция от μ, постоянно в каждом интервале (μ_s,μ_{s+1}), $s=0,1,\dots,æ$. В случае нечетного m число $r^{\pm}(\mu)$ нечетно и $r^{\pm}(\mu)=1$ при $\mu<\mu_1$ или $\mu>\mu_{æ}$, а в случае четного m число $r^{\pm}(\mu)$ четно, причем $r^{\pm}(\mu)=0$ при $\mu<\mu_1$ и $r^{\pm}(\mu)=2$ при $\mu>\mu_{æ}$. Очевидно, существует такое $\varepsilon>0$, что полоса $\{\mu\in\mathbb{C}:|\mathrm{Im}\,\mu|\le\varepsilon\}$ не содержит невещественных точек из E. Будем считать, что корни уравнения $Q^{\pm}(\lambda)=\mu$ пронумерованы так, чтобы каждый из них был аналитической функцией от μ в каждой области $\{\mu\in\mathbb{C}: |\operatorname{Im}\mu|<\varepsilon,\ \mu'_s<\operatorname{Re}\mu<\mu'_{s+1}\}$, $s=0,1,\dots,æ'$, причем вещественные корни при $\mu\in\mathbb{R}$ были аналитическими функциями в каждой области $\{\mu\in\mathbb{C}: |\operatorname{Im}\mu|<\varepsilon,\ \mu_s<\operatorname{Re}\mu<\mu_{s+1}\}$, $s=0,1,\dots,æ$. Кроме того, при $\operatorname{Im}\mu>0$ будем считать $\operatorname{Im}\lambda_j^{\pm}(\mu)>0$ для $j=0,1,\dots,n'$ и $\operatorname{Im}\lambda_j^{\pm}(\mu)<0$ для $j=n'+1,\ n'+2,\dots,m-1$. Тогда при $\mu\in(\mu_s,\mu_{s+1})$ вещественные корни $\lambda_j^{\pm}(\mu)$ с $j\le n'$ как функции от μ возрастающие, а с $j>n'$ – убывающие. При этом в случае четного m количества возрастающих и убывающих корней равны, а в случае нечетного m количества возрастающих корней на единицу больше убывающих. Относительно нумерации корней при $\mu\in\mathbb{R}$ будем считать также

$$\lim_{|\mu|\to\infty}\lambda_j^{\pm}(\mu)\,|\mu|^{-\frac{1}{m}}e^{-\frac{\arg\mu}{m}}=e^{i\frac{2\pi j}{m}},\quad j=0,1,\dots,m-1.$$

Сформулируем несколько предложений, которые относятся к существованию решений дифференциального уравнения $l(y)=\mu y$, имеющих определенные поведения на бесконечности и некоторые другие свойства. В случае четного порядка m такие предложения использованы в [3].

Теорема 1. Для каждого $\mu\in\mathbb{C}\setminus E$ дифференциальное уравнение $l(y)=\mu y$ имеет две фундаментальные системы решений $y_j^{+}(x,\mu)$ и $y_j^{-}(x,\mu)$ $(x\in\mathbb{R},\ j=0,1,\dots,m-1)$, квазипроизводные которых при $x\to\infty$ и $x\to-\infty$ соответственно обладают асимптотиками

$$y_j^{\pm[\nu]}(x,\mu)=\left(e^{ix\lambda_j^{\pm}(\mu)}\right)^{[\nu]^{\pm}}+o\left(e^{ix\lambda_j^{\pm}(\mu)}\right),\quad \nu=0,1,\dots,m-1, \tag{5}$$

причем для $\mu\in\mathbb{R}\setminus E$ и $k=0,1,\dots,m-1$ выполняются равенства

$$\left[y_j^{\pm}(x,\mu),y_k^{\pm}(x,\mu)\right]=\begin{cases}Q'^{\pm}\left(\lambda_j^{\pm}(\mu)\right), & \lambda_j^{\pm}(\mu)=\overline{\lambda_k^{\pm}(\mu)},\\ 0, & \lambda_j^{\pm}(\mu)\ne\overline{\lambda_k^{\pm}(\mu)}.\end{cases}$$

Кроме того, для $\mu\in\mathbb{R}\setminus E$ решения $y_j^{+}(x,\mu)$ и $y_j^{-}(x,\mu)$ с указанными свойствами могут быть выбраны так, чтобы при $|\mu|\to\infty$ выполнялись асимптотические равенства

$$y_j^{\pm[\nu]}(0,\mu)=|\mu|^{\frac{\nu}{m}}\left\{e^{i\frac{\nu}{m}(2\pi j+\arg\mu)}+O\left(|\mu|^{-\frac{1}{m}}\right)\right\},\quad \nu=0,1,\dots,m-1. \tag{6}$$

Теорема 2. Оператор $\mathcal{L}$ является самосопряженным и имеет ограниченный точечный спектр.

Доказательство. Рассмотрим некоторое невещественное число $\mu\notin E$ и докажем, что если решение y уравнения $l(y)=\mu y$ принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, то $y=0$. Ясно, что y представляется в виде линейной комбинации указанных в теореме 1 решений y_j^+ уравнения $l(y)=\mu y$, для которых $\operatorname{Im}\lambda_j^+(\mu)>0$. Кроме того, y является также линейной комбинацией решений y_j^- с $\operatorname{Im}\lambda_j^-(\mu)<0$. Поэтому из (5) следует, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y,y]_x=0$. Однако в силу (4) для любого $\alpha>0$ имеем $2\operatorname{Im}\mu\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}|y(x)|^2dx=[y,y]_{-\alpha}-[y,y]_{\alpha}$.

Отсюда при $\alpha\to\infty$ получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y(x)|^2dx=0$, т. е. $y=0$.

Обозначим через $\mathcal{L}'$ сужение оператора $\mathcal{L}$ на множество всех таких функций из $\mathcal{D}$, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного отрезка. Оператор $\mathcal{L}'$ является симметрическим, а сопряженный с ним оператор совпадает с $\mathcal{L}$. Замыкание $\widetilde{\mathcal{L}}'$ оператора $\mathcal{L}'$ также является симметрическим оператором, а сопряженный с ним оператор совпадает с $\mathcal{L}$. Однако из доказанного выше утверждения следует, что оператор $\widetilde{\mathcal{L}}'$ имеет нулевой индекс дефекта. Поэтому $\widetilde{\mathcal{L}}'$ является самосопряженным оператором. Но тогда $\mathcal{L}=\widetilde{\mathcal{L}}'$, т. е. оператор $\mathcal{L}$ является самосопряженным.

Докажем теперь ограниченность точечного спектра. Пусть $\mu\in\mathbb{R}\setminus E$, а $y_j(x,\mu)$ $(x\in\mathbb{R},\ j=0,1,\dots,m-1)$ – некоторая система решений уравнения $l(y)=\mu y$. Нетрудно убедиться, что определитель матрицы $\left(y_j^{[\nu]}(x,\mu)\right)_{j,\nu=0}^{m-1}$ как функция от $x\in\mathbb{R}$ постоянен, а система решений $y_j(x,\mu)$ линейно зависима тогда и только тогда, когда этот определитель равен нулю. Рассмотрим также указанные в теореме 1 решения $y_j^{\pm}(x,\mu)$ и положим $y_j(x,\mu)=y_j^+(x,\mu)$ при $0\le j\le n'$, $y_j(x,\mu)=y_j^-(x,\mu)$ при $n'<j<m$. Тогда из (6) следует существование такого $\widetilde{\mu}>0$, что при $|\mu|>\widetilde{\mu}$ $\det\left(y_j^{[\nu]}(0,\mu)\right)_{j,\nu=0}^{m-1}\neq0$, и значит, система решений $y_j(x,\mu)$ $(j=0,1,\dots,m-1)$ линейно независима. Однако если μ является собственным значением оператора $\mathcal{L}$, то уравнение $l(y)=\mu y$ имеет ненулевое решение $y\in L^2(\mathbb{R})$. Ясно, что y представляется в виде линейной комбинации каждой из систем решений $y_j^+(x,\mu)$ $(j=0,1,\dots,n')$ и $y_j^-(x,\mu)$ $(j=n'+1,n'+2,\dots,m-1)$. Но тогда рассматриваемая система решений $y_j(x,\mu)$ $(j=0,1,\dots,m-1)$ линейно зависима. Поэтому $|\mu|\le\widetilde{\mu}$. Следовательно, точечный спектр оператора $\mathcal{L}$ ограничен. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть для вещественных чисел $\widetilde{\mu}_1<\widetilde{\mu}_2$ и $\varepsilon>0$ множество $G=\{\mu\in\mathbb{C}:\ 0\le\operatorname{Im}\mu\le\varepsilon,\ \widetilde{\mu}_1\le\operatorname{Re}\mu\le\widetilde{\mu}_2\}$ не содержит точек из

E. Тогда для любого $\mu \in G$ дифференциальное уравнение $l(y) = \mu y$ имеет такие две системы линейно независимых решений $\widetilde{y}_j^+(x, \mu)$ $(j = 0, 1, ..., n')$ и $\widetilde{y}_j^-(x, \mu)$ $(j = n'+1, n'+2, ..., m-1)$, что квазипроизводные их при каждом $x \in \mathbb{R}$ являются непрерывными функциями от $\mu \in G$, а для $\widetilde{y}_j^+(x, \mu)$ при $x \to \infty$ и $\widetilde{y}_j^-(x, \mu)$ при $x \to -\infty$ выполняются асимптотические равенства

$$\widetilde{y}_j^{\pm[\nu]}(x, \mu) = O\left(e^{-x\gamma^{\pm}(\mu)}\right), \qquad \mu \in G,$$

$$\widetilde{y}_j^{\pm[\nu]}(x, \mu) = \sum_{s \in S^{\pm}} h_{js}^{\pm}(\mu)\left(e^{ix\lambda_s^{\pm}(\mu)}\right)^{[\nu]^{\pm}} + o(1), \quad \mu \in [\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2],$$

$$\nu = 0, 1, ..., m-1,$$

где $\gamma^+(\mu) = \min\{\operatorname{Im} \lambda_s^+(\mu) : 0 \le s \le n'\}$, $\gamma^-(\mu) = \max\{\operatorname{Im} \lambda_s^-(\mu) : n' < s < m\}$, S^+ и S^- – множества таких s, что для $\mu \in [\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2]$ корни $\lambda_s^+(\mu)$ $(0 \le s \le n')$ и $\lambda_s^-(\mu)$ $(n' < s < m)$ соответственно вещественны, $h_{js}^{\pm}(\mu)$ – непрерывные функции на отрезке $[\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2]$. При этом если число $\mu \in G$ не является собственным значением оператора $\mathcal{L}$, то система всех указанных решений $\widetilde{y}_j^+(x, \mu)$ и $\widetilde{y}_j^-(x, \mu)$ линейно независима.

Лемма. Пусть $\mu' \in \mathbb{R}$ – некоторое число, отличное от μ_s $(s = 1, 2, ..., æ)$, $\varepsilon > 0$ – такое число, что круг $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu'| < \varepsilon\}$ не содержит отличных от μ' точек из E, $\widetilde{\mu} \ne \mu'$ – некоторое вещественное число из указанного круга, q^+ – число корней уравнения $Q^+(\lambda) = \widetilde{\mu}$, имеющих положительные мнимые части, q^- – число корней уравнения $Q^-(\lambda) = \widetilde{\mu}$, имеющих отрицательные мнимые части. Тогда для любого μ из некоторого круга $G = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu'| < \varepsilon_0\}$ с радиусом $\varepsilon_0 \le \varepsilon$ дифференциальное уравнение $l(z) = \mu z$ имеет две такие системы линейно независимых решений $z_j^+(x, \mu)$ $(j = 1, 2, ..., q^+)$ и $z_j^-(x, \mu)$ $(j = 1, 2, ..., q^-)$, что квазипроизводные этих решений при каждом $x \in \mathbb{R}$ являются аналитическими функциями от $\mu \in G$, а для $z_j^+(x, \mu)$ при $x \ge 0$ и для $z_j^-(x, \mu)$ при $x \le 0$ выполняются неравенства

$$\left|z_j^{\pm[\nu]}(x, \mu)\right| \le c^{\pm} e^{-x\gamma^{\pm}}, \qquad \nu = 0, 1, ..., m-1, \tag{7}$$

с некоторыми постоянными $c^{\pm} > 0$, $\gamma^+ > 0$, $\gamma^- < 0$.

Теорема 4. Предельные точки точечного спектра оператора $\mathcal{L}$ принадлежат множеству $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_æ\}$.

Доказательство. Пусть точечный спектр T оператора $\mathcal{L}$ является бесконечным (т. е. счетным) множеством. Тогда в силу теоремы 2 множество T имеет предельные точки. Рассмотрим некоторую предельную точку μ' и сходящуюся к ней последовательность собственных значений $\widetilde{\mu}_k \in T \setminus \{\mu'\}$, $k=1,2,\ldots$. Пусть $z_k(x)$ – собственная функция, соответствующая собственному значению $\widetilde{\mu}_k$. Предположим $\mu' \neq \mu_s$ $(s=1,2,\ldots,\text{æ})$. Тогда относительно μ' применима доказанная лемма. Очевидно, для указанного в лемме круга G существует такое натуральное число k_0, что $\widetilde{\mu}_k \in G$ при всех $k \geq k_0$. Так как $z_k \in L^2(\mathbb{R})$, то в силу теоремы 1 и леммы при $k \geq k_0$ для собственной функции $z_k(x)$ имеют место представления

$$z_k(x) = \sum_{j=1}^{q^{\pm}} A_{jk}^{\pm} z_j^{\pm}(x, \widetilde{\mu}_k). \tag{8}$$

Ясно, что собственную функцию $z_k(x)$ можно нормировать условием

$$\sum_{j=1}^{q^+} \left| A_{jk}^+ \right| + \sum_{j=1}^{q^-} \left| A_{jk}^- \right| = 1.$$

Последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ выберем так, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{\nu} A_{jk_\nu}^{\pm} = A_j^{\pm}$ $(j=1,2,\ldots,q^{\pm})$. Тогда из (8) следует существование предела $\lim\limits_{\nu} z_{k_\nu}(x) = z(x)$, причем

$$z(x) = \sum_{j=1}^{q^{\pm}} A_j^{\pm} z_j^{\pm}(x, \mu'), \qquad \sum_{j=1}^{q^+} \left| A_j^+ \right| + \sum_{j=1}^{q^-} \left| A_j^- \right| = 1. \tag{9}$$

Из первого равенства (9) следует, что функция $z(x)$ является решением уравнения $l(z) = \mu' z$ и в силу оценок (7) принадлежит $L^2(\mathbb{R})$. С учетом второго равенства (9) число μ' является собственным значением, а $z(x)$ – соответствующей собственной функцией оператора $\mathfrak{L}$. Поэтому в силу $\mu' \neq \widetilde{\mu}_k$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_k(x) \overline{z(x)}\, dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, из оценок (7) и представлений (8) следует, что $\lim\limits_{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \left| z_{k_\nu}(x) - z(x) \right|^2 dx = 0$. Учитывая это, из (10) получим $\int_{-\infty}^{\infty} |z(x)|^2 dx = 0$, т.е. $z(x) \equiv 0$, что противоречит равенствам (9). Следовательно, предельная точка μ' принадлежит множеству $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\text{æ}}\}$.

Теорема доказана.

Следствие. Если в случае нечетного порядка m для любого $\mu \in \mathbb{R}$ уравнения $Q^+(\lambda) = \mu$ и $Q^-(\lambda) = \mu$ не имеют вещественных кратных корней, то точечный спектр оператора $\mathfrak{L}$ является конечным множеством.

В заключение автор выражает признательность проф. И.Г. Хачатряну за постановку задачи и обсуждение результатов .

Кафедра математики экономического факультета *Поступила 10.03.2003*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. **Хачатрян И.Г.** – Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1983, т. 18, № 5, с. 394–402.
3. **Бабасян С.В., Хачатрян И.Г.** – Докл. АН Арм. ССР, Математика, 1988, т. 87, № 3, с. 111–114.

Ա.Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՈՐՈՇԱԿԻ ՎԱՐՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԿԵՏԱՅԻՆ ՍՊԵԿՏՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է $L^2(\mathbb{R})$ տարածությունում $m \geq 2$ կարգի սովորական գծային ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատոր, որի գործակիցներն ունեն որոշակի վարք անվերջությունում: Հետազոտվում է այդ օպերատորի կետային սպեկտրը: Մասնավորապես, ապացուցվում են կետային սպեկտրի սահմանափակությունը և նրա սահմանային կետերի բազմության վերջավոր լինելը:

A.H. PETROSYAN

THE INVESTIGATION OF THE DIFFERENTIAL OPERATOR'S POINT SPECTRUM IN INFINITY WITH PRECISE BEHAVIOUR COEFFICIENTS

Summary

In $L^2(\mathbb{R})$ space an $m \geq 2$ linear order self-adjoint differential operator is observed the coefficients of which have precise behaviour in infinity. The operator's point spectrum is examined. Particularly the limitation of point spectrum and the non-infinity of boundary points set are proved.