

Математика

УДК 519.21

Э.А. СИМОНЯН

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЛИТТЛЯ

В работе в терминах случайных величин найдено одно обобщение известной формулы Литтля, связывающей в общей системе обслуживания длину очереди и время ожидания.

1°. Пусть в некоторой модели обслуживания с нумерацией вызовов в порядке поступления

$v_n(\omega)$ – время ожидания n -го вызова,

$N(t, \omega)$ – число поступивших за $[0, t)$ вызовов,

$\xi(t, \omega)$ – число вызовов в очереди в момент t .

Все вводимые процессы определены на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , $n \geq 1$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Формула Литтля в терминах случайных величин [1, 2] устанавливает связь $\xi(\omega) = a(\omega)v(\omega)$ почти всюду по $\omega \in \Omega$ между пределами

$$\xi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t, \omega) dt, \quad (1)$$

$$a(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N(T, \omega)}{T}, \quad (2)$$

$$v(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n(\omega) \quad (3)$$

в предположении $a(\omega) < +\infty$ и $v(\omega) < +\infty$. При этом используются представления $v_n(\omega) = \int_0^\infty X_n(t, \omega) dt$, $\xi(t, \omega) = \sum_{n \geq 1} X_n(t, \omega)$,

где $X_n(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{если в момент } t \text{ } n\text{-ый вызов в очереди,} \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$

и следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Для каждого $\omega \in \Omega$ и $a \in [0, +\infty)$ эквивалентны предельные соотношения $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N(t, \omega)}{t} = a$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n(\omega)}{n} = a$, где $t_n(\omega)$ — момент поступления n -го вызова.

Лемма 2. Если $a(\omega) < +\infty$, $v(\omega) < +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n(\omega)/t_n(\omega)) = 0$. ▸

2°. Пусть задана непрерывная, возрастающая на $[0, +\infty)$ функция $f(t) \geq 0$ и

$$H(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f(t - t_n(\omega)) X_n(t, \omega). \quad (4)$$

Имеет место следующее обобщение формулы Литтля.

Теорема. Пусть для почти всех $\omega \in \Omega$ существуют пределы (1), (2) и

$$v(\omega) = \lim_{N \rightarrow +\infty} v_N(\omega), \quad (5)$$

а также $a(\omega) < +\infty$, $v(\omega) < +\infty$. Тогда для тех же ω существует предел

$$H(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(t, \omega) dt < +\infty \quad (6)$$

и справедливо равенство

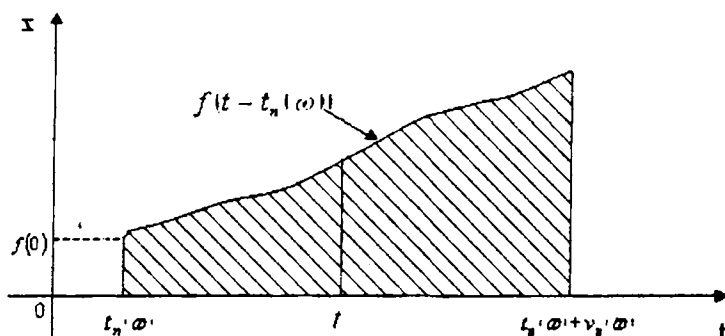
$$H(\omega) = a(\omega) \cdot \tilde{F}(v(\omega)), \quad (7)$$

где обозначено $\tilde{F}(t) = \int_0^t f(u) du$, $t \geq 0$.

Существование предела (5) влечет за собой, по теореме Штольца [3], стр. 67, существование предела (3).

Результат может быть использован для установления законов сохранения в линейных параметрических моделях [4].

3°. Функция $H(\omega)$ допускает следующую интерпретацию. С n -ым вызовом связываем область, ограниченную прямыми $x = 0$, $t = t_n(\omega)$, $t = t_n(\omega) + v_n(\omega)$ и кривой $x = f(t - t_n(\omega))$, и изображенную на рисунке.



Площадь области равна

$$F_n(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_n(\omega)}^{t_n(\omega) + v_n(\omega)} f(t - t_n(\omega)) dt = \int_0^{v_n(\omega)} f(t) dt = \int_0^\infty f(t - t_n(\omega)) X_n(t, \omega) dt = \tilde{F}(v_n(\omega)). \quad (8)$$

Из непрерывности $\tilde{F}$, (5) и (8) следует существование предела

$$F(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}(v_n(\omega)) = \tilde{F}(v(\omega)). \quad (9)$$

Проведем отстоящую вправо от оси x на расстоянии t прямую, параллельную оси x . Прямая отсекает от каждой области, связанной с присутствующим в момент t в очереди вызовом, отрезок. Сумма таких отрезков есть $H(t, \omega)$. Предельное при $T \rightarrow +\infty$ "усреднение" $H(t, \omega)$ по отрезку $[0, T]$ равно предельной при $n \rightarrow +\infty$ площади области $F_n(\omega)$, помноженной на предельное среднее при $T \rightarrow +\infty$ число поступивших вызовов за единицу времени. ▸

Придав функции f смысл накопленного за время присутствия в очереди отдельного вызова "штраф за ожидание", "приоритет", "старение привнесенной информации" и т. д., $H(\omega)$ интерпретируем как предельное математическое ожидание суммарных значений "штрафа за ожидание", "приоритета", "старения привнесенной информации" за единицу времени. ▸

Доказательство теоремы содержится в приложении. ▸

Приложение.

С учетом (4) и (6) следует доказать существование предела

$$H(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{I(T, \omega)}{T}, \quad (10)$$

где

$$I(T, \omega) = \int_0^T \sum_{n \geq 1} f(t - t_n(\omega)) X_n(t, \omega) dt. \quad (11)$$

Так как к моменту t вызовы с номерами $n > N(t, \omega)$ не поступили, то

$$\sum_{n=N(t, \omega)+1}^{N(T, \omega)} f(t - t_n(\omega)) X_n(t, \omega) = 0 \quad \text{при } T > t. \quad (12)$$

Полагая $d_n(T, \omega) = \min(T - t_n(\omega), v_n(\omega))$, с учетом (11) произведем выкладки

$$I(T, \omega) = \sum_{n=1}^{N(T, \omega)} \int_0^T f(t - t_n(\omega)) X_n(t, \omega) dt = \sum_{n=1}^{N(T, \omega)} \int_0^{d_n(T, \omega)} f(t) dt = \sum_{n=1}^{N(T, \omega)} \tilde{F}(d_n(T, \omega)). \quad (13)$$

Перестановка знаков суммы и интеграла в (11) допустима, поскольку $N(T, \omega) < +\infty$ при конечном T и $a(\omega) < +\infty$, что доказывает (13). Выберем число $\varepsilon \in (0, 1)$, полагая без ограничения общности, что $(1 - \varepsilon) \cdot N(T, \omega)$ — целое число при любом T . Для почти всех $\omega \in \Omega$ и $T \rightarrow +\infty$, по лемме 2, $\frac{1}{T} \{t_{N(T, \omega)}(\omega) - t_{(1-\varepsilon)N(T, \omega)}(\omega)\} \rightarrow \varepsilon$, откуда $\lim_{T \rightarrow +\infty} \{t_{N(T, \omega)}(\omega) - t_{(1-\varepsilon)N(T, \omega)}(\omega)\} = +\infty$. При больших T , всех $n < (1 - \varepsilon) \cdot N(T, \omega)$ и почти всех $\omega \in \Omega$ (с $v(\omega) < +\infty$) справедливы неравенства

$$v_n(\omega) < t_{N(T,\omega)}(\omega) - t_{(1-\varepsilon)N(T,\omega)}(\omega) < t_{N(T,\omega)}(\omega) - t_n(\omega) \leq T - t_n(\omega). \quad (14)$$

Из равенства

$$I(T, \omega) = \sum_{n=1}^{(1-\varepsilon)N(T,\omega)} \tilde{F}(v_n(\omega)) + J_\varepsilon(T, \omega), \quad (15)$$

определяющего при заданном ε функцию $J_\varepsilon(T, \omega)$, с помощью (13) и (14) при больших T находим оценки

$$\begin{aligned} 0 \leq J_\varepsilon(T, \omega) &\leq \sum_{n=(1-\varepsilon)N(T,\omega)+1}^{N(T,\omega)} \tilde{F}(\min\{t_{N(T,\omega)+1}(\omega) - t_{(1-\varepsilon)N(T,\omega)+1}(\omega), v_n(\omega)\}) = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N(T,\omega)} - \sum_{n=1}^{(1-\varepsilon)N(T,\omega)} \right) \tilde{F}(v_n(\omega)). \end{aligned} \quad (16)$$

Из леммы 1, теоремы Штольца, непрерывности $\tilde{F}$, (5) и (16) получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} J_\varepsilon(T, \omega) &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N(T, \omega)}{T} \cdot \frac{1}{N(T, \omega)} \sum_{n=1}^{N(T, \omega)} \tilde{F}(v_n(\omega)) - \\ &- (1-\varepsilon) \cdot \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N(T, \omega)}{T} \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon)N(T, \omega)} \sum_{n=1}^{(1-\varepsilon)N(T, \omega)} \tilde{F}(v_n(\omega)) = \varepsilon \cdot a(\omega) \cdot F(\omega), \end{aligned}$$

что в силу произвольности ε дает

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} J_\varepsilon(T, \omega) = 0 \quad (17)$$

почти всюду по $\omega \in \Omega$. В силу непрерывности $\tilde{F}$ из (15) имеем

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} I(T, \omega) = (1-\varepsilon)a(\omega)F(\omega) + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} J_\varepsilon(T, \omega) \quad (18)$$

почти всюду по $\omega \in \Omega$. Левая часть (18) не зависит от ε . Устремляя в правой части (18) $\varepsilon \downarrow 0$ и используя (17), доказываем существование предела (10) и равенство (7). Одновременно устанавливается существование конечного предела (6). Действительно, $H(\omega) < +\infty$, так как $v(\omega) < +\infty$, $a(\omega) < +\infty$,

и в силу непрерывности $f(t)$ конечен интеграл $\int_0^{v(\omega)} f(t) dt$. ▸

Автор благодарит Э.А. Даниеляна за внимание к работе.

Кафедра теории вероятностей и
математической статистики

Поступила 20.02.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. Stidham S. — Opns. Res., 1972, v. 20, p.1115–1126.
2. Stidham S. — Opns. Res., 1973, v. 21, p.670–671.
3. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970, т. 1.

ԼԻԹԼԻ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ՄԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում պատահական մեծությունների տերմիններով ստացված է Լիթլի հայտնի բանաձևի մի ընդհանրացում: Բերված է այդ ընդհանրացման մեկնաբանումը: Արդյունքը կարելի է օգտագործել գծային պարամետրիկ մոդելներում՝ պահպանման որոշ օրենքներ դուրս բերելու համար:

E.A. SIMONYAN

AN EXTENTION OF THE LITTLE'S FORMULA

Summary

In the present paper an extension of the well-known Little's formula in the terms of random variables is established. The interpretation of obtained formula is given. The result allows application to linear-parametrical models in order to prove some conservation laws.