ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2003 Естественные науки

*Математика*

УДК 512.543

В.С. АТАБЕКЯН

# О СТРОЕНИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ СВОБОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП

Изучается строение периодов $C_i$ свободных периодических групп достаточно большого нечетного периода. С помощью полученных результатов, в частности, можно указать алгоритм конструктивного построения новых периодов сколь угодно больших рангов.

Для решения ограниченной проблемы Бернсайда П.С. Новиковым и С.И. Адяном [1] было предложено достаточно сложное индуктивное определение определяющих соотношений свободной периодической группы $\mathbb{B}(m,n)$ многообразия с единственным тождеством $x^n=1$, где $m\geq 2$, а $n$– достаточно большое нечетное число ($n\geq 665$, см. также [2]). Позднее А.Ю. Ольшанский [3] ценой значительного ухудшения оценки для $n(n>10^{10})$ предложил следующее простое определение независимой системы определяющих соотношений группы $\mathbb{B}(m,n)$. В множестве непустых несократимых слов в групповом алфавите $b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}, \ldots, b_m^{\pm 1}$ вводится полный порядок $b_1<b_2<\ldots$, такой, что из $|X|<|Y|$ следует $X<Y$, где $|X|$ – длина слова $X$. $C_i$ при $i\geq 1$ определяем как минимальное из тех слов, образы которых имеют бесконечные порядки в ранге $i-1$, т. е. в группе

$$G_i=<b_1,b_2,\ldots,b_m \mid C_1^n,\ldots,C_{i-1}^n>.$$

В статье [3] (см. также [4]) доказывается, что

$$\mathbb{B}(m,n)=<b_1,b_2,\ldots,b_m \mid C_1^n=1, C_2^n=1,\ldots,C_i^n=1,\ldots>. \qquad (0)$$

Как в [2], так и в [3], доказывается, что для любого $i\geq 1$ период $C_i$ существует (см., напр. [3], лемма 5.6).

В настоящей статье мы изучаем вопрос о конструктивном построении периодов $C_i$. В частности из теоремы 3 вытекает простой алгоритм построения все новых периодов: если $C_j(b_1,b_2)$– произвольный период ранга $j$ в алфавите $b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}$, а $A$ и $B$– специально подобранные, как и в теореме 3, слова, то слово $C_j(A,B)$ будет периодом некоторого ранга $i$, где $i>j$.

В дальнейшем пусть $m = 2$, $A_1$ – достаточно длинное слово в алфавите $b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}$, начинающееся и кончающееся на $b_2$, которое не содержит подслов вида $E^{[n/4]}$. Такие слова существуют: в алфавите $b_1, b_2$ можно построить бесконечное слово, не содержащее подслов вида $E^3$ [5].

Если $D = D(b_1, b_2)$ – произвольное слово, то $D(A, B)$ означает слово, получающееся от $D(b_1, b_2)$ подстановкой вместо букв $b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}$ слов $A^{\pm 1}, B^{\pm 1}$ соответственно.

Пусть $A = b_1 A_1 b_1^3$, а $B = b_2 A\, b_2^{-1}$. Очевидно $x_1 = A$, $y_1 = 1$, $y_2 = b_2$ удовлетворяют условиям теоремы 1 [6], тем самым гр$\{A; B\} \cong \mathbb{B}(2, n)$.

Заметим, что произвольное слово $D(b_1, b_2)$ единственным образом можно представить в виде

$$D(b_1, b_2) = d_1^{k_1} \cdot d_2^{k_2} \dots d_t^{k_t}, \qquad (1)$$

где $d_i \in \{b_1, b_2\}$, $i = 1, 2, \dots, t$, и $d_i \neq d_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, t-1$.

Через $\tau_j(D(b_1, b_2))$ обозначим число всех различных индексов $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ в правой части равенства (1), для которых $d_i = b_j$. Сразу же можно привести равенство

$$|D(A, B)| = |D(b_1, b_2)| \cdot |A| + 2 \cdot \tau_2(D(b_1, b_2)). \qquad (2)$$

Теперь среди копредставлений группы $\mathbb{B}(2, n)$ выделим некоторые, которые впоследствии нам понадобятся. Множество всех слов в алфавите $b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}$ вполне упорядочим (для этой цели будем использовать символ $<_A$), соблюдая следующие условия:

1) из $|X| < |Y|$ следует $X <_A Y$;

2) пусть $|X| = |Y| < |A|$, где $X = d_{i_1}^{k_1} \dots d_{i_t}^{k_t}$, $Y = d_{j_1}^{l_1} \dots d_{j_s}^{l_s}$ – представления слов $X, Y$ в виде (1). Тогда из $\tau_2(X) < \tau_2(Y)$ следует $X <_A Y$, а если $\tau_2(X) = \tau_2(Y)$, то из $\tau_1(X) < \tau_1(Y)$ следует $X <_A Y$;

3) если $|X| = |Y| \geq |A|$ и для некоторого слова $E_1$ $X = A^{\pm 1} \cdot E_1$, а для всех слов $E_2$ $Y \neq A^{\pm 1} \cdot E_2$, причем $X, Y$ – циклически несократимые слова, то $X <_A Y$.

В остальном порядок произвольный. Искомое копредставление группы $\mathbb{B}(2, n)$ имеет вид

$$\mathbb{B}(2, n) = < b_1, b_2 \mid R = 1, R \in R(A) >, \qquad (3)$$

где $R(A) = \{C_1^n, C_2^n, \dots, C_i^n, \dots\}$, а $C_i$ – минимальное слово относительно упорядочения $<_A$, имеющее бесконечный порядок в группе

$$< b_1, b_2 \mid C_1^n = 1,\ C_2^n = 1, \dots, C_{i-1}^n = 1 >.$$

*Теорема 1.* Допустим, что $D(b_1,b_2)$ – циклически несократимое слово, $|A|>|D(b_1,b_2)|$ и $D(A,B)=YC_i(B_1,b_2)\cdot Y^{-1}$, где либо $Y=1$, либо $Y=b_2$, а $C_i(b_1,b_2)$ – период ранга $i$ группы $\mathbb{B}(2,n)$. Если $D(b_1,b_2)$ и $C_j^{k_1}$ ($C_j$ – период ранга $j$) сопряжены в ранге $l$, то $l<j$, $|D(b_1,b_2)|=|C_j|$, $k_1=\pm 1$ и $|C_l|<3\cdot n^{-1}\cdot|C_j|$.

*Доказательство.* Рассмотрим минимальную кольцевую диаграмму $\Delta$ ранга $l$ с границами $p$ и $q$ и метками $\varphi(p)=D(b_1,b_2)$, $\varphi(q)=C_j^{-k_1}$, причем $q$ считаем гладким участком границы. Применив к $\Delta$ теорему 17.1 [4], получаем $\bar{\beta}|C_j^{k_1}|\le|D(b_1,b_2)|$, откуда либо $|C_j|<|D(b_1,b_2)|$, либо $|C_j|\ge|D(b_1,b_2)|$ и $|k_1|=1$. В последнем случае, разрезая диаграмму $\Delta$ с помощью некоторого пути, определенного леммой 17.1 [4], оценим периметр полученной односвязной диаграммы $\Delta_1$:

$$|\partial\Delta_1|\le|C_j|+|D(b_1,b_2)|+2\gamma(|C_j|+|D(b_1,b_2)|)<(2+4\gamma)\cdot|C_j|.$$

В дальнейшем пусть $\bar{\beta}=\rho$.

Согласно следствию 17.1 [4], это означает, что ранг $l$ диаграммы $\Delta$ меньше $j$, значит, поскольку $C_j^{\pm 1}$ и $D(b_1,b_2)$ сопряжены в ранге $l$, имеем $|D(b_1,b_2)|=|C_j|$ и $|C_l|\le n^{-1}\cdot\rho^{-1}\cdot(2+4\gamma)|C_j|<3n^{-1}\cdot|C_j|$.

Остается показать, что случай $|C_j(b_1,b_2)|<|D(b_1,b_2)|$ невозможен. Действительно, если это так, то

$$|C_j(A,B)|<|C_j(b_1,b_2)|\cdot|A|+|A|\le|D(b_1,b_2)|\cdot|A|\le|C_i(b_1,b_2)|, \tag{4}$$

ибо если $Y=b_2$, то буква $b_2$ входит в слово $D(b_1,b_2)$ (в противном случае, $C_i(b_1,b_2)=b_2^{-1}A^{k_2}b_2$, в то время как $C_i$ циклически несократимо), и поэтому $|D(b_1,b_2)|\cdot|A|\le|D(A,B)|-2\le|C_i(b_1,b_2)|$.

С другой стороны, по теореме [6] отображение $b_1\to A$, $b_2\to B$ продолжается до изоморфизма. Значит, $C_j^{k_1}(A,B)$ и $D(A,B)$ сопряжены в $\mathbb{B}(2,n)$, т. е. $C_j^{k_1}(A,B)$ и $C_i(b_1,b_2)$ сопряжены в $\mathbb{B}(2,n)$. Но из неравенства (4) получаем, что $C_j^{k_1}(A,B)$ и $C_i(b_1,b_2)$ сопряжены в ранге $t<i$, а это противоречит определению периода $C_i(b_1,b_2)$ и неравенству (4).

*Теорема 2.* Пусть $C_j(b_1,b_2)$ – период ранга $j$ группы $\mathbb{B}(2,n)$, заданной копредставлением (3), и $|C_j(b_1,b_2)|<|A|-2$. Тогда если $C_j(b_1,b_2)$ сопряжено в $\mathbb{B}(2,n)$ со словом $D(b_1,b_2)$, то или $|C_j(A,B)|\le|D(A,B)|-2$, или $|C_j(A,B)|=|D(A,B)|$ и $|C_j(B,A)|\le|D(B,A)|$.

*Доказательство.* Предположим сначала, что $|C_j(b_1,b_2)|<$ $<|D(b_1,b_2)|$. Согласно (2), $|C_j(A,B)|=|C_j(b_1,b_2)|\cdot|A|+2\cdot\tau_2(C_j(b_1,b_2))\le$ $\le(|C_j(b_1,b_2)|+1)\cdot|A|-2\le|D(b_1,b_2)|\cdot|A|-2\le|D(A,B)|-2$.

Пусть поэтому $|C_j(b_1,b_2)|=|D(b_1,b_2)|$. Тогда либо $\tau_2(C_j(b_1,b_2))<$ $<\tau_2(D(b_1,b_2))$, либо $\tau_2(C_j(b_1,b_2))=\tau_2(D(b_1,b_2))$, и $\tau_1(C_j(b_1,b_2))\le$ $\le\tau_1(D(b_1,b_2))$ (по определению периода $C_j(b_1,b_2)$). Значит, либо $|C_j(A,B)|=|C_j(b_1,b_2)|\cdot|A|+2\cdot\tau_2(C_j(b_1,b_2))\le|D(b_1,b_2)|\cdot|A|+2(\tau_2(D(b_1,b_2)\ -1))=$ $=|D(A,B)|-2$, либо $|C_j(A,B)|=|D(A,B)|$ и $|C_j(B,A)|=|C_j(b_1,b_2)|\cdot|A|+$ $+2\cdot\tau_1(C_j(b_1,b_2))\le|D(b_1,b_2)|\cdot|A|\ +2\tau_1(D(b_1,b_2))=|D(B,A)|$.

Теорема 2 доказана.

*Теорема 3*. Пусть $C_j(b_1,b_2)$ – период ранга $j$ группы $\mathbb{B}(2,n)$, заданной копредставлением (3), и $3\cdot|C_j(b_1,b_2)|<|A|$. Рассмотрим несократимые слова $C_x(b_1,b_2)$, определенные из равенств $C_x(b_1,b_2)=X^{-1}C_j(A,B)\cdot X$, где либо $X=1$, либо $X=b_2$. Тогда существует копредставление группы $\mathbb{B}(2,n)$ вида (0) такое, что $C_j(b_1,b_2)$ – по-прежнему период ранга $j$ и одно из слов $C_x$ – период некоторого ранга $i>j$, причем $|C_i|>|A|\cdot|C_j(b_1,b_2)|$.

*Доказательство.* Рассмотрим соотношение $C_j^n(A,B)=1$.

Из условия 3) упорядочения $<_A$ следует, что если $C_k(b_1,b_2)$ – какой-либо период ранга $k$, содержащий в качестве циклического подслова слово $A^{\pm1}$, то он начинается со слова $A^{\pm1}$. Кроме того, слова $X_1=A$ и $Y_{ij}=b_2^{\pm1}$, $i\ne j\in\{1,2\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1 [6] $(X_1=1, X_2=b_2)$. Поэтому существуют слова $U_k=U_k(A,B)$ и $D_k=D_k(A,B)$, $k=1,2,\dots,s$, причем $D_k(A,B)$ – циклически несократимые слова от порождающих $A,B$, такие, что

$$\text{а)}\ C_j^n(A,B)\underset{=}{\circ}\prod_{k=1}^{s}U_k(A,B)\cdot D_k^{\pm n}(A,B)\cdot U_k^{-1}(A,B), \tag{5}$$

б) для некоторого слова $X_{j_k}$, где $X_{j_k}=1$ или $X_{j_k}=b_2$, имеет место равенство

$$X_{j_k}^{-1}\cdot D_k(A,B)\cdot X_{j_k}=C_{ik}, \tag{6}$$

где $C_{i_k}$ – период ранга $i_k$, и

в) $\left|C_{i_k}(b_1,b_2)\right| < n^{-1}\cdot\rho^{-1}\cdot\left|C_j^n(A,B)\right| \le \rho^{-1}\cdot\left|C_j(A,B)\right|$. (7)

Заметим, что если $X_{j_k} = b_2$ в равенстве (6), то буква $b_2$ входит в слово $D_k(b_1,b_2)$, значит $|A|\cdot|D_k(b_1,b_2)| \le |D_k(A,B)| - 2 \le \left|C_{i_k}(b_1,b_2)\right| < \rho^{-1}\cdot|B|\cdot|C_j(b_1,b_2)|$, а в случае $X_{j_k} = 1$ имеем $|A|\cdot|D_k(b_1,b_2)| \le |D_k(A,B)| = \left|C_{i_k}(b_1,b_2)\right| < \rho^{-1}\cdot|B|\cdot|C_j(b_1,b_2)|$, т. е. в обоих вариантах

$$|D_k(b_1,b_2)| < 2|C_j(b_1,b_2)| < |A|. \tag{8}$$

Поскольку $|D_k(b_1,b_2)| < |D_k(A,B)|$, то из (6) и из леммы 18.3 [4] следует, что $D_k(b_1,b_2)$ сопряжено с некоторым словом $C_{t_k}^{s_k}$ (где $C_{t_k}$ – период ранга $t_k$) в ранге $l_k \le i_k$.

Согласно (8) и (6), к словам $D_k(b_1,b_2)$ можно применить теорему 1, в силу которой существуют слова $V_k(b_1,b_2)$ такие, что

$$D_k(b_1,b_2) = V_k\cdot C_{t_k}^{\pm1}\cdot V_k^{-1},\quad |D_k(b_1,b_2)| = \left|C_{t_k}\right|$$

и

$$\left|C_{l_k}\right| < 3n^{-1}\cdot\left|C_{t_k}\right| = 3n^{-1}|D_k| < 6n^{-1}\left|C_j\right|,\ \text{т. е. } l_k < j,\ k = 1,2,\ldots,s.$$

Поэтому из равенства (5) следует

$$C_j^n(b_1,b_2) \underset{=}{\circ} \prod_{k=1}^{s} U_k(b_1,b_2)\cdot D_k^{\pm n}(b_1,b_2)\cdot U_k^{-1}(b_1,b_2) \underset{=}{l} \prod_{k=1}^{s} U_k\cdot V_k\cdot C_{t_k}^{\pm n}\cdot V_k^{-1}\cdot U_k^{-1},$$

где $l = \max_k\{l_k\}$ и $l < j$ (отображение $b_1 \to A$, $b_2 \to B$ – мономорфизм абсолютно свободной группы).

С другой стороны, по следствию 18.1 [4], соотношение $C_j^n = 1$ не следует из остальных соотношений $C_{t_k}^n = 1$ при $t_k \ne j$. Таким образом, для некоторого $t_k$ $C_j(b_1,b_2) = C_{t_k}(b_1,b_2)$, откуда следует $D_k(b_1,b_2) = V_k\cdot C_j^{\pm1}(b_1,b_2)\cdot V_k^{-1}$, т. е. в силу (6) слово $C_j^{\pm1}(A,B)$ сопряжено со словом $D_k(A,B) = X_{j_k}\cdot C_{i_k}\cdot X_{j_k}^{-1}$, где $X_{j_k} = 1$ или $X_{j_k} = b_2$. Применив теорему 1 к словам $C_j$ и $D_k$, получим, что либо $|C_j(A,B)| < |D_k(A,B)| - 2$, либо $|C_j(A,B)| = |D_k(A,B)|$ и $|C_j(B,A)| = \left|b_2^{-1}C_j(A,B)\cdot b_2\right| \le |D_k(B,A)| = \left|b_2^{-1}D_k(A,B)\cdot b_2\right|$. В любом случае одно из слов $C_x(b_1,b_2) = X^{-1}\cdot C_j(A,B)\cdot X$ удовлетворяет неравенству

$$|C_x(b_1,b_2)| \le \min\{|D_k(A,B)|, |D_k(B,A)|\} = \left|C_{i_k}(b_1,b_2)\right|.$$

Кроме того, как и в теореме 1, из последнего неравенства следует, что $C_x^{\pm 1}(b_1,b_2)$ и $C_{i_k}(b_1,b_2)$ сопряжены в ранге $i_k - 1 \geq j$. Поэтому $C_{i_k}^n = 1$ можно заменить на эквивалентное ему в ранге $i_k - 1$ соотношение $C_x^n = 1$. Теорема 3 доказана.

*Кафедра алгебры и геометрии* *Поступила 25.10.2002*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Новиков П.С., Адян С.И.** – Изв. АН СССР, сер мат., 1968, т. 32, № 1, с. 212–244; № 2, с. 251–524; № 3, с. 709–731.
2. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
3. **Ольшанский А.Ю.** – Мат. сб., 1982, т. 118, № 2, с. 203–235.
4. **Ольшанский А.Ю.** Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
5. **Саломаа А.** Жемчужины теории формальных языков, М.: Мир, 1986.
6. **Atabekian V.S.** – Algebra, geometry & their applications, 2001, vol. 1.

Վ.Ս. ԱԹԱԲԵԿՅԱՆ

## ԱԶԱՏ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԽՄԲԵՐԻ ՈՐՈՇԻՉ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԻ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է բավականաչափ մեծ, կենտ պարբերությամբ ազատ բեռնսայդյան խմբերի $C_i$ պարբերական բառերի կառուցվածքի հարցը: Ստացված արդյունքներից, մասնավորապես, բխում է, թե ինչպես կարելի է արդեն կառուցված պարբերական բառերի օգնությամբ կառուցել որքան ասես մեծ ռանգի նոր պարբերական $C_i$ բառեր:

V.S. ATABEKIAN

## ABOUT THE CONSTRUCTION OF DEFINING RELATIONS IN FREE PERIODIC GROUPS

### Summary

The study is about the $C_i$ periodic word construction of the free Burnsaide group. With the obtained results we can build other however bigger needed $C_i$ periodic words.