ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2003 Естественные науки

Математика

УДК 519.48

Л.Р. АБРАМЯН

ТЕРНАРНЫЕ СВЕРХТОЖДЕСТВА АССОЦИАТИВНОСТИ

Дается классификация тернарных сверхтождеств ассоциативности в нетривиальных тернарных обратимых алгебрах и доказывается критерий выполнимости для каждого из них в обратимых алгебрах.

Классификация бинарных нетривиальных сверхтождеств ассоциативности в нетривиальных бинарных обратимых алгебрах (т. е. в алгебрах с бинарными квазигрупповыми операциями) содержится в работе В.Д. Белоусова [1]. В монографии [2] (см. также [3]) эти результаты усиливаются в двух направлениях: для q-алгебр и e-алгебр. Кроме того, аналогичные результаты, а также результаты о сверхтождествах в термальных алгебрах полугрупп можно найти в [4–8].

§1. Предварительные понятия и результаты. Для краткости условимся обозначать последовательность $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m$ через x_n^m. Символ x_n^m имеет смысл, если $n \le m$. При $n \succ m$ под x_n^m будем понимать пустую последовательность.

Пусть $n \in N$. Множество Q с одной n-арной операцией называется n-группоидом и обозначается через $Q(A)$. Алгебра $Q(\Sigma)$ с n-арными операциями называется n-арной алгеброй. При $n = 2, 3$ n-арная алгебра соответственно называется бинарной и тернарной алгеброй.

Напомним понятие n-квазигруппы: n-группоид $Q(A)$ называется n-квазигруппой или n-арной квазигруппой, если в равенстве $A(x_1^n) = x_{n+1}$ всякие n элементы из x_1^{n+1} однозначно определяют $(n+1)$-й. Иными словами, $Q(A)$ называется n-квазигруппой, если уравнение $A(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^n) = b$ однозначно разрешимо для любых $a_1^n, b \in Q$ и для любого $i = 1,2,\ldots,n$. При $n = 3$ получаем 3-квазигруппу или тернарную квазигруппу, а при $n = 2$ – 2-квазигруппу или обычную (бинарную) квазигруппу. Если $Q(A)$ – n-арная квазигруппа, то A называется квазигрупповой операцией арности $|A| = n$, n-квазигруппа с единицей называется n-лупой.

n-квазигруппа $Q(A)$ называется n-группой, если в ней выполняются следующие тождества ассоциативности $(n \geq 2)$:

$A(A(x_1,\ldots,x_n),x_{n+1},\ldots,x_{2n-1}) = A(x_1,\ldots,x_i,A(x_{i+1},\ldots,x_{i+n}),x_{i+n+1},\ldots,x_{2n-1})$ для всех $i = 1,2,\ldots,n-1$.

n-квазигруппа $Q(B)$ называется изотопом n-квазигруппы $Q(A)$, если существует последовательность $T = (\alpha_1^{n+1})$ подстановок множества Q такая, что $B(x_1^n) = \alpha_{n+1}^{-1}A(\{\alpha_i x_i\}_1^n)$ для всех $x_1^n \in Q$.

Любая n-квазигруппа изотопна n-лупе [9, 10].

Теорема Алберта. Если n-лупа изотопна n-группе с еденицей, то они изоморфны [9, 10].

Более общий результат в бинарных алгебрах доказывается в монографии [2].

Алгебра $Q(\Sigma)$ называется обратимой, если для любой операции $A \in \Sigma$ $Q(A)$ является n-квазигруппой для некоторого $n \in N$.

Следующая теорема доказывается в монографии [9].

Теорема 1. При условии $P \geq j$ решения функционального уравнения $A(B(x_1^p),x_{p+1}^t) = C(x_{1i}^{j-1},D(x_j^t))$ в обратимой алгебре $Q(A,B,C,D)$ даются следующим образом

$$A(x,W) = \alpha x \cdot M(W),$$
$$B(U,V) = \alpha^{-1}(L(U)\cdot K(V)),$$
$$C(U,x) = L(U)\cdot J(x),$$
$$D(U,W) = J^{-1}(K(U)\cdot M(W)),$$

где L,K,M – произвольные квазигрупповые оперции на Q арности $|L| = j-1$, $|K| = p-i+1$, $|M| = t-p$, $(\cdot)$ – произвольная групповая операция на Q, а α, J – произвольные подстановки множества Q.

Следующее следствие, вытекающее из теоремы 1, используется при доказательстве основных результатов.

Следствие 1. Для того чтобы в тернарной обратимой алгебре $Q(A,B,C,D)$ выполнялось тождество $A(B(x,y,z),u,v) = C(x,y,D(z,u,v)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$A(y,u,v) = \alpha(y)\cdot M(u,v),$$
$$B(x,y,z) = \alpha^{-1}(L(x,y)\cdot K(z)),$$
$$C(x,y,z) = L(x,y)\cdot J(z),$$
$$D(z,u,v) = J^{-1}(K(z)\cdot M(u,v)),$$

где $Q(\cdot)$ – группа, M,L – квазигрупповые операции на Q, а α,K,J – подстановки множества Q.

Пусть $Q(\circ)$ – (бинарная) квазигруппа (в частности лупа Муфанг или группа). Подстановка $\alpha: Q \to Q$ называется голоморфизмом квазигруппы $Q(\circ)$, если существуют такие подстановки β,γ множества Q, что $\alpha(x \circ y) = \beta(x) \circ \gamma(y)$ для любых $x, y \in Q$.

Лемма 1. Если в лупе Муфанг (в частности группе) $Q(\circ)$ с единицей $e \in Q$ для всех $x, y \in Q$ выполняется равенство $\alpha_1(x \circ y) = \alpha_2(x) \circ \alpha_3(y)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – подстановки множества Q, и какие-либо два из элементов $\alpha_1 e, \alpha_2 e, \alpha_3 e$ лежат в ядре K_Q лупы Муфанг $Q(\circ)$, тогда любая из подстановок α_i – голоморфизм $Q(\circ)$, при этом $\alpha_i(x \circ y) = \alpha_i(x) \circ (\alpha_i e)^{-1} \circ \alpha_i(y)$ для любых $x, y \in Q$ [2]:

Лемма 2. Если в лупе Муфанг (в частности группе) $Q(\circ)$ с единицей $e \in Q$ для всех $x, y, z \in Q$ выполняется равенство $\alpha_1(\alpha_2(x \circ y) \circ z) = \alpha_3(x) \circ \alpha_4(\alpha_5(y) \circ \alpha_6(z))$, где все $\alpha_i\ (i = 1,...,6)$ – подстановки множества Q и $\alpha_1(\alpha_2 e)$, $\alpha_1(\alpha_6^{-1}(e))$, $\alpha_i e \in K_Q$ при $i = 1,3,4$, тогда все подстановки $\alpha_i\ (i = 1,...,6)$ – голоморфизмы лупы Муфанг $Q(\circ)$ [9].

§2. Характеризация тернарных ассоциативных сверхтождеств.

Тернарная алгебра $Q(\Sigma)$ называется нетривиальной, если $|\Sigma| \succ 1$. Из определения тернарной квазигруппы вытекает следующий результат.

Предложение1. Если в нетривиальной тернарной обратимой алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, определенное по равенству $((x,y,z),u,v) = (x,y,(z,u,v))$, тогда в нем каждое функциональное переменное повторяется. Следовательно, каждое такое сверхтождество может быть только функционального ранга два и одного из следующих видов:

$$X(Y(x,y,z),u,v) = Y(x,y,X(z,u,v)), \tag{1}$$

$$X(X(x,y,z),u,v) = Y(x,y,Y(z,u,v)), \tag{2}$$

$$X(Y(x,y,z),u,v) = X(x,y,Y(z,u,v)). \tag{3}$$

Далее, приступаем к характеризации тех тернарных обратимых алгебр, в которых выполняются эти сверхтождества.

1. Рассмотрим сверхтождество (1). Обозначив $w = \{u,v\}$, $u = \{x,y\}$, $v = \{z\}$ и взяв в данном сверхтождестве $A_i = X$, $Y = B$, получим $A_i(B(x,y,z),u,v) = B(x,y,A_i(z,u,v))$.

По следствию 1 имеем $\begin{cases} A_i(x,w) = \alpha_i x \textcircled{1} \mathrm{M}_i(w), \\ B(u,x) = L(u) \textcircled{1} \mathrm{J}x, \end{cases}$

где $\textcircled{1}$ – групповая операция на Q для любого i. С другой стороны, если $X = A$, $Y = B$, то получим $\begin{cases} A(x,w) = \alpha_0 x \circ M_0(w), \\ B(u,x) = L'(u) \circ J'x, \end{cases}$

где $(\circ)$ – групповая операция на Q.

Таким образом, $L(u) \textcircled{1} J(x) = L'(u) \circ J'x$. Заменим $u \to L^{-1}u$, $x \to J^{-1}x$, получим $u \textcircled{1} x = L'(L^{-1}u) \circ J'(J^{-1}x) = \sigma(u) \circ \tau(x)$, $u \textcircled{1} x = \sigma(u) \circ \tau(x)$, т. е. все группы $Q(\textcircled{1})$ изотопны одной и той же группе $Q(\circ)$ и, согласно теореме Алберта, все они изоморфны. Следовательно, $A_i(x, w) = \alpha_i x \textcircled{1} M_i(w) = q_i x \circ p_i M_i(w)$. Взяв в рассматриваемом сверхтождестве $X = Y = A_i$, получим $A_i(A_i(x, y, z), u, v) = A_i(x, y, A_i(z, u, v))$, т. е.

$$q_i(q_i x \circ p_i M_i(y, z)) \circ p_i M_i(u, v) = q_i x \circ p_i M_i(Y, A_i(z, u, v)) =$$
$$= q_i x \circ p_i M_i(Y, q_i z \circ p_i M_i(u, v)).$$

Далее, $q_i(q_i x \circ p_i M_i(\varphi, z)) \circ p_i M_i(u, v) = q_i x \circ p_i M_i(Y, q_i(z) \circ p_i M_i(u, v))$.

Заменяя $x \to q_i^{-1} e$, получим

$$q_i(p_i M_i(y, z)) \circ p_i M_i(u, v) = p_i M_i(Y, q_i z \circ p_i M_i(u, v)),$$
$$q_i(p_i M_i(y, z) \circ t = p_i M_i(y, q_i z \circ t),$$

где $t = p_i M_i(u, v)$. При замене $z \to q_i^{-1} e$ имеем $\mu_i(y) \circ t = p_i M_i(y, t)$,

$$A_i(x, y, z) = q_i x \circ p_i M_i(y, z) = q_i x \circ \mu_i y \circ z,$$
$$q_i(q_i x \circ \mu_i y \circ z) \circ \mu_i u \circ v = q_i x \circ \mu_i y \circ q_i z \circ \mu_i u \circ v,$$
$$q_i(q_i x \circ \mu_i y \circ z) = q_i \circ \mu_i y \circ q_i z.$$

Если здесь $x \to q_i^{-1} x$, $y \to \mu_i^{-1} y$, то получим $q_i(x \circ y \circ z) = x \circ y \circ q_i z$.

Пусть $y = e$, тогда $q_i(x \circ z) = x \circ q_i z$, $z = e$, $q_i x = x \circ t_i$.

Следовательно, $A_i(x, y, z) = x \circ t_i \circ \mu_i y \circ z = x \circ \delta_i y \circ z$.

Это необходимое условие теоремы 2. Непосредственной подстановкой показывается, что оно является также и достаточным условием для того, чтобы в обратимой алгебре (Q, Σ) имело место вышеупомянутое сверхтождество (1). Действительно, в рассматриваемой алгебре $Q(\Sigma)$ справедливо тождество $A_i(A_j(x, y, z), u, v) = A_j(x, y, A_i(z, u, v))$, т. к., подставляя значения операций $A_i, A_j \in \Sigma$ в него, получаем истинное равенство:

$$(x \circ t_j \circ \mu_j y \circ z) \circ t_i \circ \mu_i u \circ v = x \circ t_j \circ \mu_j y \circ z \circ t_i \circ \mu_i u \circ v.$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2. Для того чтобы в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполнялось сверхтождество (1), необходимо и достаточно, чтобы для произвольной операции $A_i \in \Sigma$ выполнялось условие $A_i(x, y, z) = x \circ \mu_i y \circ z$, где $Q(\circ)$ – группа, а μ_i – подстановка множества Q.

Рассмотрим сверхтождество (2). Пусть в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (2).

Обозначим $w = \{u, v\}$, $u = \{x, y\}$, $v = \{z\}$ и взяв $X = A_i, Y = B$, получим $A_i(A_i(x, y, z), u, v) = B(x, y, B(z, u, v))$.

Согласно следствию 1, имеем $\begin{cases} A_i(x,w) = \alpha_i x \textcircled{1} \mathrm{M}_i(w), \\ B(u,x) = L'(u) \textcircled{1} J' x, \end{cases}$

где $\textcircled{1}$ – групповая операция на Q. С другой стороны, взяв $X = A$, $Y = B$, имеем $\begin{cases} A_i(x,w) = \alpha x \circ M(w), \\ B(u,x) = L''(u) \circ J''(x), \end{cases}$

где $(\circ)$ – групповая операция на Q.

Таким образом, $L'(u) \textcircled{1} J'(x) = L''(u) \circ J'(x)$ и $u \textcircled{1} x = \sigma(u) \circ \tau(x) = u \circ t_i \circ x$, поскольку

$$\begin{cases} u \textcircled{1} e_i = \sigma(u) \circ \tau(e_i), \\ u = \sigma(u) \circ r_i, \\ \sigma(u) = u \circ r_i^{-1}, \\ \sigma(x) = s_i^{-1} \circ x. \end{cases}$$

Итак, $A_i(x,w) = \alpha_i x \circ t_i \circ M_i(w) = q_i x \circ M_i(w)$, т. е. $A_i(x,u,v) = q_i x \circ (M_i(u,v)$.

Теперь в рассматриваемом сверхтождестве, взяв $X = Y = A_i \in \Sigma$, получим $A_i(A_i(x,y,z),u,v) = A_i(x,y,A_i(z,u,v))$, т. е. $q_i(q_i x \circ M_i(y,z)) \circ M_i(u,v) = q_i x \circ M_i(y, A_i(z,u,v)) = q_i x \circ M_i(y, q_i z \circ M_i(u,v))$.

Таким образом, $q_i(q_i x \circ M_i(y,z)) \circ M_i(u,v) = q_i x \circ M_i(y, q_i z \circ M_i(u,v))$. Заменяя $x \to q_i^{-1} x$, приходим к равенству $q_i(M_i(y,z)) \circ M_i(u,v) = M_i(y, q_i z \circ M_i(u,v))$.

Пусть $t = M_i(u,v)$, тогда $q_i(M_i(y,z)) \circ t = M_i(y, q_i z \circ t)$. Откуда при $z \to q_i^{-1} z$ имеем $\mu_i(y) \circ t = M_i(y,t)$ и $A_i(x,y,z) = q_i x \circ M_i(y,z) = q_i x \circ \mu_i y \circ z$.

Подставляя это значение в сверхтождество (2), получим $q_i(q_i x \circ \mu y \circ z) \circ \mu_i u \circ v = q_i x \circ \mu_i y \circ q_i z \circ \mu_i u \circ v$, $q_i(q_i x \circ \mu_i y \circ z) = q_i x \circ \mu_i y \circ q_i z$. Если $x \to q_i^{-1} x$, $y \to \mu_i^{-1} y$, то $q_i(x \circ y \circ z) = x \circ y \circ q_i z$. Откуда при $y = e$ имеем $q_i(x \circ z) = x \circ q_i z$ и $q_i x = x \circ t_i$, т. е. $x \circ t_i \circ \mu_i y \circ z \circ t_i = x \circ t_i \circ \mu_i y \circ z \circ t_i = x \circ t_i \circ \mu_i y \circ z \circ t_i$, $A_i(x,y,z) = x \circ t_i \circ \mu_i y \circ z$ или $A_i(x,y,z) = x \circ \mu_i y \circ z$. Подставляя последнее в сверхтождество (2), получим $x \circ \mu_i y \circ z \circ \mu_i u \circ v = x \circ \mu_j y \circ z \circ \mu_j u \circ v$.

Здесь возьмем $z = u = e$ и зафиксируем j, получим $\mu_i y = \mu y \circ b_i$. Следовательно, $A_i(x,y,z) = x \circ t_i \circ \mu_i y \circ z$. Подставим это значение в сверхтождество (2), получим $x \circ \mu_i y \circ b_i \circ z \circ \mu_i u \circ b_i \circ v = x \circ \mu_j y \circ b_j \circ z \circ \mu_j u \circ b_j \circ v$.

Здесь возьмем $z = e$ и зафиксируем j, тогда

$$\begin{cases} b_i \circ \mu u \circ b_i = b \circ \mu u \circ b, \\ b_i \circ u \circ b_i = b \circ u \circ b, \\ b^{-1} \circ b_i \circ u = u \circ b \circ b_i^{-1}, \end{cases}$$

откуда при $u = e$ получим $b^{-1} \circ b_i = b \circ b_i^{-1} = t_i$, $t_i \circ u = u \circ t_i$, $b^{-1} \circ b_i = t_i$, т.е. $b_i = b \circ t_i$, где $t_i \in Z(Q(\circ))$. Следовательно, $A_i(x,y,z) = x \circ \mu y \circ b \circ z \circ t_i$ или $A_i(x,y,z) = x \circ \delta y \circ z \circ t_i$.

Подставляя $A_i(x,y,z)$ в сверхтождество (2), получим $t_i^2 = t_j^2$.

Таким образом, имеет место следующий критерий.

Теорема 3. Для того чтобы в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполнялось сверхтождество (2), необходимо и достаточно, чтобы для произвольной операции $A_i \in \Sigma$ выполнялись условия $A_i(x,y,z) = x \circ \delta y \circ z \circ t_i$, $t_i^2 = t_j^2$, где $Q(\circ)$ – группа, δ – подстановка, $t_i \in Z(Q(\circ))$ – центр группы $Q(\circ)$.

Перейдем к сверхтождеству (3). Пусть в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (3). Возьмем $X = A_i$, $Y = B$ и обозначим $w = \{u,v\}$, $u = \{x,y\}$, $v = \{z\}$, тогда $A_i[B(x,y,z),u,v] = A_i[x,y,B(z,u,v)]$.

По следствию 1, $\begin{cases} A_i(x,w) = \alpha_i x \textcircled{T} \mathrm{M}_i(w), \\ B(u,v) = \alpha^{-1}(L(u) \textcircled{T} \mathrm{K}(v)). \end{cases}$

С другой стороны, взяв $X = A$, $Y = B$, получим $\begin{cases} A(x,w) = \alpha x \cdot M(w), \\ B(u,v) = \alpha'^{-1}(L'(u) \cdot K'(v)). \end{cases}$

Таким образом, $\alpha^{-1}(L(u)K(v)) = \alpha'^{-1}(L'(u) \cdot K'(v)), L(u)K(v) = J(L'(u)K'(v))$.

Пусть $u \to L^{-1}u, v \to K^{-1}v$, тогда $\beta_i(t \textcircled{T} s) = \beta_i t \cdot \beta_i s, t \textcircled{T} s = \beta_i^{-1}(\beta_i t \cdot \beta_i s)$.

Следовательно, $A_i(x,w) = \beta_i^{-1}(\alpha_i x \cdot \beta_i M_i(u,v))$. Подставляя полученное значение в сверхтождество (3), выводим

$$\alpha_i Y(x,y,z) \cdot \beta_i M_i(u,v) = \alpha_i x \cdot \beta_i M_i(y, Y(z,u,v)),$$

$$\alpha_i \beta_j^{-1}(\alpha_j x \cdot \beta_j M_j(y,z) \cdot \beta_i M_i(u,v) = \alpha_i x \cdot \beta_i M_i(y, \beta_j^{-1}(\alpha_j z \cdot \beta_j M_j(u,v).$$

При $i = j$ имеем

$$\alpha_i \beta_i^{-1}(\alpha_i x \cdot \beta_i M_i(y,z)) \cdot \beta_i M_i(u,v) = \alpha_i x \cdot \beta_i M_i(y, \beta_i^{-1}(\alpha_i z \cdot \beta_i M_i(u,v))).$$

Заменяя $x \to \alpha_i^{-1}$, получим

$$\alpha_i M_i(y,z) \cdot t = \beta_i \cdot M_i(y, \beta_i^{-1}(\alpha_i z \cdot t)), \quad \beta_i M_i(y,t) = \alpha_i y \cdot \beta_i t,$$

$$M_i(y,t) = \beta_i^{-1}(J_i y \cdot \beta_i t).$$

Следовательно, $A_i(x,y,z) = \beta_i^{-1}(\alpha_i x \cdot J_i y \cdot \beta_i z)$.

Подставляя значение A_i в сверхтождество (3), получим

$$\alpha_i Y(x,y,z)\cdot J_i u\cdot\beta_i v=\alpha_i x\cdot J_i y\cdot\beta_i Y(z,u,v),$$

$$\alpha_i\beta_j^{-1}(\alpha_j x\cdot\alpha_j y\cdot\beta_j z)\cdot J_i u\cdot\beta_i v=\alpha_i x\cdot J_i y\cdot\beta_i\beta_j^{-1}(\alpha_j z\cdot J_j u\cdot\beta_j u).$$

Пусть $i=j$, тогда

$$\alpha_i\beta_i^{-1}(\alpha_i x\cdot J_i y\cdot\beta_i z)=\alpha_i x\cdot J_i y\cdot\alpha_i z,\ \alpha_i\beta_i^{-1}(x\cdot y\cdot\beta_i z)=$$
$$=x\cdot y\cdot\alpha_i z,\ \beta_i^{-1}(x\cdot y\cdot\beta_i z)=\alpha_i^{-1}(x\cdot y\cdot\alpha_i z),$$
$$\beta_i^{-1}(y\cdot t_i^{*})=\alpha_i^{-1}(y),\ \beta_i^{-1}(x\cdot y\cdot\beta_i z)=\beta_{i(}^{-1}x\cdot y\cdot\alpha_i z\cdot t_i^{*}),$$
$$\beta_i z=\alpha_i z\cdot t_i^{*},\quad \alpha_i z=\beta_i z(t_i^{*})^{-1}=\beta_i z\cdot t_i$$

и $A_i(x,y,z)=\beta_i^{-1}(\beta_i x\cdot J_i y\cdot\beta_i z)=\beta_i^{-1}(\beta_i x\cdot\gamma_i y\cdot z)$, где $J_i: y\to t_i\cdot\gamma_i y$.

Подставляя эти значения в сверхтождество (3), получим

$$\beta_i\beta_i^{-1}(\beta_j x\cdot J_j y\cdot\beta_j z)\cdot J_i u\cdot\beta_i v=\beta_i x\cdot J_i y\cdot\beta_i\beta_j^{-1}(\beta_j z\cdot J_j u\cdot\beta_j v).$$

Теперь можно воспользоваться леммой 2:

$\beta_i\beta_j^{-1}=\theta_i,\ \beta_j^{-1}\cdot\beta_i=\theta_{ij},\ \beta_j^{-1}=\beta^{-1}\theta_j,\ \beta_j=\beta\theta_i,\ \beta_i^{-1}=\theta_i^{-1}\beta^{-1}$, где θ_i является голоморфизмом группы $Q(\cdot)$. Далее,

$A_i(x,y,z)=\beta_i^{-1}(\beta_i x\cdot J_i y\cdot\beta_i z)=\beta^{-1}(\theta_i(\theta_i^{-1}(\beta x)\cdot J_i y\cdot\theta_i^{-1}(\beta z)))=$

$=\beta^{-1}(\beta x(\theta_i e)^{-1}\theta_i(J_i y)\cdot(\theta_i e)^{-1}\cdot\beta z)=\beta^{-1}(\beta x\cdot J_i y\cdot\beta z)$, *где* $(\theta_i e)^{-1}(\theta_i(J_i y)\cdot(\theta_i e)^{-1}$ обозначено через $J_i y$.

С учетом последнего получим

$$\beta^{-1}(\beta(\beta^{-1}(\beta x\cdot J_j y\cdot\beta z))\cdot J_i u\cdot\beta v)=\beta^{-1}(\beta x\cdot J_i y\cdot\beta\beta^{-1}(\beta z\cdot J_j u\cdot\beta v)),$$

$$\beta x\cdot J_j y\cdot\beta z\cdot J_i u\cdot\beta v=\beta x\cdot J_i y\cdot\beta z\cdot J_j u\cdot\beta v,\quad \gamma_j y\cdot\beta z\cdot J_i u=J_i y\cdot\beta z\cdot J_j u.$$

Зафиксируем j,y,z, получим

$J_i u=t_i\cdot Ju,\ A_i(x,y,z)=\beta^{-1}(\beta x\cdot t_i\cdot Jy\cdot\beta z),\ t_j Ju\cdot\beta z\cdot t_i\cdot Ju=t_i Ju\cdot\beta z\cdot t_j\cdot Ju,$

$t_j\cdot Ju\cdot\beta z\cdot t_i=t_i\cdot Ju\cdot\beta z\cdot t_j,\ t_j\cdot x\cdot t_i=t_i x\cdot t_j,\ t_i^{-1}\cdot t_j\cdot x=x\cdot t_j\cdot t_i^{-1}.$

Пусть $x=e$, тогда $t_i^{-1}\cdot t_j=t_j\cdot t_i^{-1}$. Поэтому $t_i^{-1}\cdot t_j=t_j\cdot t_i^{-1}\in Z[Q(\cdot)]$, т. е. $t_j\cdot t_i^{-1}=z_{ij}\in Z[Q(\cdot)]$ и $t_j=z_j\cdot t$, где t – фиксированный элемент. Следовательно, $A_i(x,y,z)=\beta^{-1}(\beta x\cdot t\cdot Jy\cdot\beta z\cdot z_i)=\beta^{-1}(\beta x\cdot Jy\cdot\beta z\cdot z_i)$, т.е. $A_i(x,y,z)=\beta^{-1}(\beta x\cdot Jy\cdot\beta z\cdot z_i)$, где $z_i\in Z[Q(\cdot)]$, что является необходимым и достаточным условием.

Непосредственной проверкой показывается, что это условие является также и достаточным. Действительно, $A_i(A_j(x,y,z),u,v)=A_i(x,y,A_i(z,u,v))$, так как учитывая значения операций A_i,A_j, получаем равенства:

$$\beta^{-1}(\beta A_j(x,y,z)\cdot Ju\cdot\beta v\cdot z_i)=\beta^{-1}(\beta x\cdot Jy\cdot\beta A_i(z,u,v)\cdot z_i),$$

$$\beta A_j(x,y,z)\cdot Ju\cdot\beta v\cdot z_i=\beta x\cdot Jy\cdot\beta A_i(z,u,v)\cdot z_i,$$

$$\beta\cdot\beta^{-1}(\beta x\cdot Jy\cdot\beta z)\cdot Ju\cdot\beta v=\beta x\cdot Jy\cdot\beta\beta^{-1}\cdot(\beta z\cdot Ju\cdot\beta v\cdot z_i),$$

$$\beta x\cdot Jy\cdot \beta z\cdot z_j\cdot Ju\cdot \beta v=\beta x\cdot Jy\cdot \beta z\cdot Ju\cdot \beta v\cdot z_i\,.$$

Таким образом, получили следующую теорему.

Теорема 4. Для того чтобы в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполнялось сверхтождество (3), необходимо и достаточно, чтобы для каждой операции $A_i\in\Sigma$ $A_i(x,y,z)=\beta^{-1}\cdot(\beta x\cdot Jy\cdot\beta z\cdot z_i)$, где $Q(\cdot)$ – группа, $z_i\in Z(Q(\cdot))$, отображения $\gamma,\beta:Q\to Q$ являются подстановками множества Q.

АрГУ

Поступила 11.02.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белоусов В.Д.** – УМН, 1965, т. XX, № 1, с. 75–145.
2. **Мовсисян Ю.М.** Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1986.
3. **Мовсисян Ю.М.** – УМН, 1998, т. 53, № 1(319), с. 61–114.
4. **Movsisyan Y.M.** – Sci. Math. Jap., 2001, v. 54, № 3, p. 595–640.
5. **Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А., Шеврин Л.Н., Шульгейфер Е.Г.** Общая алгебра. М.: Наука, 1991, т. 2.
6. **Schweigert D.** Hyperidentities, Algebras and Orders, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston, London, 1993.
7. **Iseki K.** – Maht. Japonia, 2000, v. 52, p. 163–170.
8. **Denecke K., Wismath Sh.L.** Universal Algebra and Applications in Theoretical Computer Science, Chapman & Hall/CRC, Roca Raton, London, New York, Washington, D.C., 2002.
9. **Белоусов В.Д.** *n*-арные квазигруппы, Кишинев: Изд-во Штиинца, 1971.
10. **Курош А.Г.** Общая алгебра. М.: Наука, 1974.

Լ.Ռ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

3-ՏԵՂԱՆԻ ԶՈՒԳՈՐԴԱԿԱՆ ԳԵՐՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ամփոփում

Հոդվածում դասակարգվում են 3-տեղանի զուգորդական գերնույնություններ, որոնք որոշված են $((x,y,z),u,v)=(x,y,(z,u,v))$ հավասարումով։

Ստացվում են հետևյալ երեք գերնույնությունները՝

$$X(Y(x,y,z),u,v)=Y(x,y,X(z,u,v)),$$

$$X(X(x,y,z),u,v)=Y(x,y,Y(z,u,v)),$$

$$X(Y(x,y,z),u,v)=X(x,y,Y(z,u,v))\,:$$

Յուրաքանչյուր գերնույնության համար ապացուցվում է իրացնելիության հայտանիշ 3-տեղանի հակադարձելի հանրահաշիվներում։

L.R. ABRAHAMIAN

THE TERNARY HYPERIDENTITIES OF ASSOCIATIVITY

Summary

The work is devoted to ternary hyperidentities of associativity, which are determined by the equality $((x,y,z),u,v)=(x,y,(z,u,v))$.

We get the following three hyperidentities:

$$X(Y(x,y,z),u,v)=Y(x,y,X(z,u,v)),$$

$$X(X(x,y,z),u,v)=Y(x,y,Y(z,u,v)),$$

$$X(Y(x,y,z),u,v)=X(x,y,Y(z,u,v)).$$

The criteria of realization are proved for each of them in the reversible algebras.