

Механика

УДК 531.36

С.Р. АМБАРЦУМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ ПРИ ПАРЕ ЧИСТО
МНИМЫХ КОРНЕЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача устойчивости по действующей силе системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в критическом случае, когда характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения системы имеет пару чисто мнимых корней.

Получены достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, при которых тривиальное решение будет асимптотически устойчивым или неустойчивым по действующей силе.

1. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i = \Phi_i(y_1, y_2) \quad (i=1,2), \quad (1.1)$$

где Φ_i – аналитические функции в R^2 и $\Phi_i(0,0)=0$ ($i=1,2$).

Известно ([1], стр. 57), что в этом случае систему (1.1) можно привести к виду

$$\dot{y}_i = P_{i1}y_1 + P_{i2}y_2 + Y_i(y_1, y_2) \quad (i=1,2), \quad (1.2)$$

линейное приближение которой будет

$$\dot{y}_i = P_{i1}y_1 + P_{i2}y_2 \quad (i=1,2). \quad (1.3)$$

Пусть корни характеристического уравнения системы (1.3) удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 = i\alpha, \quad \lambda_2 = -i\alpha, \quad (1.4)$$

т. е. имеется пара чисто мнимых корней $\pm i\alpha$, где $\alpha \neq 0$ – действительное число.

Известно ([1], стр. 74), что в этом случае только с помощью линейного приближения (1.3) невозможно решить задачу устойчивости системы (1.2), т.е. имеет место критический случай.

Известно также, что при условии (1.4) с помощью неособого преобразования систему (1.3) можно привести к виду ([1], стр. 120)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1, \end{cases} \quad (1.5)$$

а систему (1.2) – к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + X_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (1.6)$$

где вектор-функция $X(x_1, x_2)$ содержит члены не ниже второго порядка переменных x_1, x_2 .

Попытаемся получить достаточные условия, накладываемые на функции $X_i(x_1, x_2)$ ($i=1,2$), при которых тривиальное решение системы (1.6) будет устойчивым, неустойчивым или асимптотически устойчивым по действующей силе [2].

В [2, 3] приведены необходимые и достаточные условия, при которых системы линейных дифференциальных уравнений неустойчивы по действующей силе.

Рассмотрим систему (1.6). Пусть для нее существует определенно-положительная функция $V(x_1, x_2)$, которая удовлетворяет условиям

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} V(x_1, x_2) = \infty, \quad (1.7)$$

$$x_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \quad (1.8)$$

$$W = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2(x_1, x_2), \quad (1.9)$$

причем W является знакопостоянной отрицательной функцией при $\|x\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|\} < \infty$, а $W = 0$ – есть многообразие точек, не содержащее целых полутраекторий системы (1.6) при $T \leq t < \infty$. Тогда производная функции $V(x_1, x_2)$ по времени в силу системы (1.6) будет

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(1.6)} &= -\alpha x_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1(x_1, x_2) + \alpha x_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2(x_1, x_2) = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

которая при условиях (1.7), (1.8), (1.9) является знакопостоянной отрицательной функцией при $\|x\|_2 < \infty$. Отсюда следует, что тривиальное решение системы (1.6) асимптотически устойчиво в целом, так как для нее выполняются все условия теоремы Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости в целом ([1], стр. 463). Следовательно, тривиальное решение системы (1.6) асимптотически устойчиво по действующей силе [3].

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Если для системы (1.6) существует определенно-положительная функция $V(x_1, x_2)$, такая, что имеют место условия (1.7),

(1.8), (1.9), то тривиальное решение системы (1.6) асимптотически устойчиво по действующей силе.

2. Снова рассмотрим систему (1.6). Пусть функции $X_1(x_1, x_2)$ и $X_2(x_1, x_2)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2) &= X_1^{(0)}(x_1) + X_1'(x_1, x_2) = X_1(x_1, 0) + X_1'(x_1, x_2) = \\ &= g_0 x_1^m + g_1 x_1^{m+1} + \dots + X_1'(x_1, x_2), \\ X_2(x_1, x_2) &= X_2^{(0)}(x_2) + X_2'(x_1, x_2) = X_2(0, x_2) + X_2'(x_1, x_2) = \\ &= \varphi_0 x_2^k + \varphi_1 x_2^{k+1} + \dots + X_2'(x_1, x_2) \end{aligned}$$

где $g_0, g_1, \varphi_0, \varphi_1$ — постоянные. В этом случае система (1.6) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + g_0 x_1^m + g_1 x_1^{m+1} + \dots + X_1'(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \varphi_0 x_2^k + \varphi_1 x_2^{k+1} + \dots + X_2'(x_1, x_2). \end{cases} \quad (2.1)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. Если система (1.6) имеет вид (2.1) и разложения функций $X_1^{(0)}$ и $X_2^{(0)}$ содержат только нечетные степени переменных x_1 и x_2 соответственно с неположительными коэффициентами, причем хотя бы один из них отличен от нуля, а

$$x_1 X_1'(x_1, x_2) + x_2 X_2'(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

знакопостоянная отрицательная функция при $\|x\|_2 < \infty$, то тривиальное решение системы (1.6) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Доказательство. Пусть система (1.6) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + g_0 x_1^m + g_2 x_1^{m+2} + \dots + X_1'(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \varphi_0 x_2^k + \varphi_2 x_2^{k+2} + \dots + X_2'(x_1, x_2), \end{cases} \quad (2.3)$$

где $g_{2i} \leq 0$, $\varphi_{2i} \leq 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), а $m = 2l + 1$, $k = 2p + 1$, причем существуют $g_l \neq 0$, $\varphi_p \neq 0$.

Рассмотрим определенно-положительную функцию

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2). \quad (2.4)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(2.3)} &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -\alpha x_1 x_2 + g_0 x_1^{m+1} + g_2 x_1^{m+3} + \dots + x_1 X_1'(x_1, x_2) + \alpha x_1 x_2 + \\ &+ \varphi_0 x_2^{k+1} + \varphi_2 x_2^{k+3} + \\ &\dots + x_2 X_2'(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i} x_1^{m+2i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{2i} x_2^{k+2i+1} + x_1 X_1'(x_1, x_2) + x_2 X_2'(x_1, x_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i} x_1^{2l+1+2i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{2i} x_2^{2p+1+2i+1} + x_1 X_1'(x_1, x_2) + x_2 X_2'(x_1, x_2) = \\
&= \sum_{r=l+1}^{\infty} g_{2(r-l-1)} x_1^{2r} + \sum_{d=p+1}^{\infty} \varphi_{2(d-p-1)} x_2^{2d} + x_1 X_1'(x_1, x_2) + x_2 X_2'(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

где $r = i + l + 1$, $d = i + p + 1$.

Так как $g_{2i} \leq 0$, $\varphi_{2i} \leq 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) и существуют $g_i \neq 0$, $\varphi_p \neq 0$ и выполнено условие (2.2), то функция $\dot{V}|_{(2.3)}$ будет определенно-отрицательной при $\|x\|_2 < \infty$. Очевидно, что для функции (2.4) выполняется также условие $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} V(x_1, x_2) = \infty$, т. е. в данном случае для уравнений (2.3) удовлетворяются все условия теоремы Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости в целом [4]. Следовательно, тривиальное решение уравнения (2.3) асимптотически устойчиво в целом. В этом случае оно будет асимптотически устойчиво по действующей силе [3].

Таким образом, теорема 2.1 доказана.

3. Пусть разложения функций $X_1^{(0)}$ и $X_2^{(0)}$ в системе (2.1) содержат только нечетные степени переменных x_1 и x_2 соответственно, причем первые коэффициенты отрицательны, а остальные – неотрицательны и хотя бы один из них отличен от нуля. В этом случае система (2.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + g_0 x_1^m + g_2 x_1^{m+2} + \dots + X_1'(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \varphi_0 x_2^k + \varphi_2 x_2^{k+2} + \dots + X_2'(x_1, x_2), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $g_0 < 0$; $g_{2i} \geq 0$, $\varphi_0 < 0$; $\varphi_{2i} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots$), а $m = 2l + 1$, $k = 2p + 1$, причем $g_l \neq 0$, $\varphi_p \neq 0$.

Рассмотрим определенно-положительную функцию

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (3.2)$$

Предположим, что

$$x_1 X_1'(x_1, x_2) + x_2 X_2'(x_1, x_2) = 0. \quad (3.3)$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
\dot{V}|_{(3.1)} &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -\alpha x_1 x_2 + g_0 x_1^{m+1} + g_2 x_1^{m+3} + \dots + x_1 X_1'(x_1, x_2) + \alpha x_1 x_2 + \\
&+ \varphi_0 x_2^{k+1} + \varphi_2 x_2^{k+3} + \dots + x_2 X_2'(x_1, x_2) = x_1^{m+1}(g_0 + g_2 x_1^2 + \dots) + x_2^{k+1}(\varphi_0 + \varphi_2 x_2^2 + \dots) + \\
&+ x_1 X_1'(x_1, x_2) + x_2 X_2'(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Обозначив $W_1(x_1) = g_2 x_1^2 + \dots$, $W_2(x_2) = \varphi_2 x_2^2 + \dots$, имеем

$$\dot{V}|_{(3.1)} = x_1^{m+1}(g_0 + W_1(x_1)) + x_2^{k+1}(\varphi_0 + W_2(x_2)) + x_1 X_1'(x_1, x_2) + x_2 X_2'(x_1, x_2).$$

Очевидно, что функции $W_1(x_1)$ и $W_2(x_2)$ определенно-положительные. Поскольку $g_0 < 0$, а функции $W_1(x_1)$ и x_1^{m+1} определенно-положительные ($m+1$ – четное число) при $|x_1| < \infty$, то существует h_1 такое, что $W_1(h_1) = -g_0$.

Поскольку $\varphi_0 < 0$, а функции $W_2(x_2)$ и x_2^{k+1} определенно-положительные при $|x_2| < \infty$, то существует h_2 такое, что $W_2(h_2) = -\varphi_0$.

Предположим также, что

$$h_1 = h_2 = h. \quad (3.4)$$

Следовательно, так как выполнено условие (3.3), функция $\dot{V}|_{(3.1)} < 0$

при $\|x\|_2 < h$ и $\dot{V}|_{(3.1)} > 0$ при $\|x\|_2 > h$.

Поскольку функция (3.2) определенно-положительная и тривиальное решение системы (3.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову только в области

$$\|x\|_2 < h \quad (h < \infty), \quad (3.5)$$

а $\dot{V}|_{(3.1)} > 0$ – вне области (3.5), то для системы (3.1) выполняются все условия теоремы о неустойчивости по действующей силе [5]. Следовательно, тривиальное решение системы (3.1), а значит и тривиальное решение системы (1.6) неустойчивы по действующей силе.

Итак, верна следующая теорема.

Теорема 3.1. Если система (1.6) имеет вид (2.1) и разложения функций $X_1^{(0)}$ и $X_2^{(0)}$ содержат только нечетные степени переменных x_1 и x_2 соответственно, причем коэффициент первого члена разложения отрицателен, а коэффициенты остальных – неотрицательны, хотя бы один из них отличен от нуля и выполнены условия (3.3), (3.4), то тривиальное решение системы (1.6) неустойчиво по действующей силе.

4. Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 - \alpha x_1^3 - dx_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 - bx_2^3 + dx_1^2 x_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\alpha \neq 0$, a, b – положительные постоянные.

Если для линейного приближения уравнений системы (4.1) возьмем функцию Ляпунова в виде $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, то условие (1.9), приведенное в теореме 1.1, примет вид $W = -\alpha x_1^4 - bx_2^4$, что представляет собой знакоопределенную отрицательную функцию. Очевидно, что для функции $V(x_1, x_2)$ удовлетворяются также условия (1.7), (1.8). Следовательно, в данном примере для системы (4.1) удовлетворяются все условия теоремы

1.1 об асимптотической устойчивости по действующей силе. Тогда тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Пример 2. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 - ax_1^3 - bx_1^5 - kx_1^3 x_2^4, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 - cx_2^3 - dx_2^5 - kx_1^4 x_2^3, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\alpha \neq 0$, a, c – положительные постоянные и b, d, k – неотрицательные постоянные.

Очевидно, что система (4.2) имеет вид (2.1).

Если для линейного приближения уравнений системы (4.2) в качестве функции Ляпунова возьмем $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, то функция (2.2) (в теореме 2.1) примет вид $-bx_1^6 - dx_2^6 - 2kx_1^4 x_2^4$, что представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию, т. е. в данном примере для системы (4.2) удовлетворяются все условия теоремы 2.1 об асимптотической устойчивости по действующей силе. Следовательно, тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Автор статьи выражает искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, проф. М.С. Габриеляну и кандидату физ.-мат. наук С.Г. Шагиняну за многие полезные советы и замечания.

Кафедра высшей математики и теоретической механики Армянской Сельскохозяйственной Академии

*Поступила 19.03.2002,
после доработки 18.03.2003*

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 530 с.
2. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. – Ученые записки ЕГУ, 1989, № 1, с. 27–32.
3. Шагинян С.Г. – Ученые записки ЕГУ, 1986, № 2, с. 39–45.
4. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. – ПММ, 1954, т. 18, вып. 3, с. 345–350.
5. Шагинян С.Г., Амбарцумян С.Р. – Ученые записки ЕГУ, 1996, № 2, с. 30–36.

Ս.Ռ. ՀԱՄԱՐԶՈՒՄՅԱՆ

ԶՈՒՅԳ ԿԵՂԾ ԱՐՄԱՏՆԵՐՈՎ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ
ԸՍՏ ԱԶԴՈՂ ՈՒԺԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է երկրորդ կարգի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի կայունության խնդիրը ըստ ազդող ուժի կրիտիկական

դեպքում, երբ համակարգի գծային մոտավորության համապատասխան բնութագրիչ հավասարումն ունի զույգ կեղծ արմատներ:

Ստացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում դիտարկվող համակարգի զրոյական լուծումը կլինի ասինպտոտիկ կայուն կամ անկայուն ըստ ազդող ուժի:

S.R. HAMBARDZUMYAN

ON THE STABILITY BY ACTING FORCE WITH PAIR IMAGINING ROOTS FOR THE SECOND ORDER SYSTEM

Summary

The problem of stability of system for second order of non-linear differential equations in critical case has been considered, when the characteristic equation, corresponding to linear approximation of system, has pair imagining roots.

Sufficient conditions have been obtained in case of which the trivial solution of the considered system is either asymptotic stable or non-stable for acting force.