ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2004 Естественные науки

Математика

УДК 517.984

А. Г. ПЕТРОСЯН, И. Г. ХАЧАТРЯН

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПОВЕДЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Рассматривается в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ обыкновенный линейный самосопряженный дифференциальный оператор порядка $m \geq 2$, коэффициенты которого имеют определенные поведения на бесконечности. Выводится разложение Фурье посредством минимальной системы обобщенных собственных функций этого оператора.

Пусть $\mathcal{L}$ – самосопряженный дифференциальный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ порядка $m \geq 2$, порожденный следующей дифференциальной операцией l (см. [1, 2]):

$$l(y) = \frac{1}{i^m} y^{(m)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i^{2k}} \left(p_k y^{(k)}\right)^{(k)} + \sum_{k=0}^{n'-1} \frac{1}{2i^{2k+1}} \left\{ \left(p_{2k+1} y^{(k)}\right)^{(k+1)} + \left(p_{2k+1} y^{(k+1)}\right)^{(k)} \right\},$$

где y – функция, определенная на $\mathbb{R}$, i – мнимая единица, $n = \left[\frac{m}{2}\right]$, $n' = \left[\frac{m-1}{2}\right]$, а коэффициенты p_k – вещественные измеримые функции на $\mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\infty}^{0} \left|p_k(x) - a_k^-\right| dx + \int_{0}^{\infty} \left|p_k(x) - a_k^+\right| dx < \infty, \qquad k = 0, 1, \dots, m-2, \tag{1}$$

с некоторыми вещественными числами $a_k^\pm$.

Настоящая работа посвящена получению разложения Фурье посредством минимальной системы обобщенных собственных функций оператора $\mathcal{L}$ (см. [1], стр. 9, 10). Применяется метод, указанный в [3]. В случае, когда в условиях (1) $a_k^\pm = 0$ $(k = 0, 1, \dots, m-2)$, такое разложение получено в [4].

Рассмотрим следующие многочлены Q^+ и Q^- относительно $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$Q^\pm(\lambda) = \lambda^m + \sum_{k=0}^{m-2} a_k^\pm \lambda^k .$$

Обозначим через M множество всех таких $\mu \in \mathbb{R}$, для которых уравнение $Q^+(\lambda) = \mu$ или $Q^-(\lambda) = \mu$ имеет комплексные кратные корни. Очевидно, число точек множества M не превышает $2m-2$. Пусть æ – число тех значений $\mu \in M$, для которых одно из указанных уравнений имеет вещественные кратные корни. При æ $\neq 0$ эти значения, пронумерованные в порядке возрастания, обозначим через $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{æ}$. Положим также $\mu_0 = -\infty$ и $\mu_{æ+1} = \infty$. Для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ обозначим через $r^+(\mu)$ и $r^-(\mu)$ числа вещественных корней (с учетом их кратностей) уравнений $Q^+(\lambda) = \mu$ и $Q^-(\lambda) = \mu$ соответственно. Ясно, что $r^+(\mu)$ и $r^-(\mu)$ как функции от μ постоянны в каждом интервале (μ_k, μ_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots,$ æ.

Точечный спектр T оператора $\mathcal{L}$ является конечным или счетным подмножеством в $\mathbb{R}$. Как показано в [2], если множество T счетно, то оно ограничено и его предельные точки принадлежат множеству $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{æ}\}$. Значит, в случае æ $= 0$ множество T конечно. Оператор $\mathcal{L}$ может и не иметь точечного спектра.

В случае четного m имеем, что æ ≥ 1, а для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ числа $r^\pm(\mu)$ четные, причем $r^\pm(\mu) = 0$ при $\mu < \mu_1$ и $r^\pm(\mu) = 2$ при $\mu > \mu_{æ}$. При каждом $k = 1, 2, \ldots,$ æ для $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ положим $r^\pm(\mu) = 2r_k^\pm$. Ясно, что $r_{æ}^\pm = 1$ и $1 \leq r_k^+ + r_k^- \leq m$.

В случае нечетного m для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ числа $r^\pm(\mu)$ нечетные, причем $r^\pm(\mu) = 1$ при $\mu < \mu_1$ или $\mu > \mu_{æ}$. При каждом $k = 0, 1, \ldots,$ æ для значений $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ положим $r^\pm(\mu) = 2r_k^\pm + 1$. Имеем, что $r_0^\pm = r_{æ}^\pm = 0$ и $0 \leq r_k^+ + r_k^- < m$.

Положим $\delta = 1$ при четном m и $\delta = 0$ при нечетном m. При каждом $k = \delta, \delta+1, \ldots,$ æ для $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ вещественные корни уравнения $Q^\pm(\lambda) = \mu$ обозначим через $\lambda_\nu^\pm(\mu)$, $\nu = \delta, \delta+1, \ldots, 2r_k^\pm$. Будем считать, что эти корни пронумерованы так, чтобы каждый из них был аналитической функцией от μ, возрастающей при $\delta \leq \nu \leq r_k^\pm$ и убывающей при $r_k^\pm < \nu \leq 2r_k^\pm$. Производную функции $\lambda_\nu^\pm(\mu)$ обозначим через $\lambda_\nu'^\pm(\mu)$. При каждом $\mu \notin M \cup T$ дифференциальное уравнение $l(\varphi) = \mu\varphi$ имеет $r_k^+ + r_k^- + 1 - \delta$ линейно независимых ограниченных решений $\varphi_j(x, \mu)$

($x \in \mathbb{R}$, $j = \delta, \delta+1, \dots, r_k^+ + r_k^-$). Эти решения при $x \to \pm\infty$ обладают асимптотикой

$$\varphi_j(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=\delta}^{2r_k^\pm} \sqrt{\left|\lambda_\nu'^{\pm}(\mu)\right|}\, A_{j\nu}^{\pm}(\mu) e^{ix\lambda_\nu^\pm(\mu)} + o(1), \tag{2}$$

причем для всех $j, s = \delta, \delta+1, \dots, r_k^+ + r_k^-$ выполняется следующее равенство (если в приведенных ниже формулах нижний номер суммирования больше верхнего, то под этой суммой подразумевается нуль):

$$\sum_{\nu=\delta}^{r_k^+} A_{j\nu}^+(\mu)\, \overline{A_{s\nu}^+(\mu)} + \sum_{\nu=r_k^-+1}^{2r_k^-} A_{j\nu}^-(\mu)\, \overline{A_{s\nu}^-(\mu)} = \sum_{\nu=\delta}^{r_k^-} A_{j\nu}^-(\mu)\, \overline{A_{s\nu}^-(\mu)} + \sum_{\nu=r_k^++1}^{2r_k^+} A_{j\nu}^+(\mu)\, \overline{A_{s\nu}^+(\mu)}.$$

Если при каждом $j = \delta, \delta+1, \dots, r_k^+ + r_k^-$ положить

$$B_{j\nu}(\mu) = \begin{cases} A_{j\nu}^+(\mu), & \delta \le \nu \le r_k^+, \\ A_{j,\nu-r_k^++r_k^-}^-(\mu), & r_k^+ < \nu \le r_k^+ + r_k^-, \end{cases}$$

$$C_{j\nu}(\mu) = \begin{cases} A_{j\nu}^-(\mu), & \delta \le \nu \le r_k^-, \\ A_{j,\nu+r_k^+-r_k^-}^+(\mu), & r_k^- < \nu \le r_k^+ + r_k^-, \end{cases}$$

то матрицы

$$\left(B_{j\nu}(\mu)\right)_{j,\nu=\delta}^{r_k^++r_k^-}, \quad \left(C_{j\nu}(\mu)\right)_{j,\nu=\delta}^{r_k^++r_k^-} \tag{3}$$

невырожденные и связаны соотношением $\sum_{\nu=\delta}^{r_k^++r_k^-} B_{j\nu}(\mu)\, \overline{B_{s\nu}(\mu)} = \sum_{\nu=\delta}^{r_k^++r_k^-} C_{j\nu}(\mu)\, \overline{C_{s\nu}(\mu)}$. При этом в качестве одной из матриц (3) можно взять произвольную невырожденную матрицу, а по ней другая матрица и решения $\varphi_j(x, \mu)$ определяются однозначно. Кроме того, если одна из матриц (3) унитарна, то другая тоже унитарна. Впредь будем предполагать, что в (2) матрицы (3) унитарны, а их элементы являются измеримыми функциями (в частности, в качестве одной из матриц (3) можно взять единичную матрицу). При такой нормировке систему решений $\varphi_j(x, \mu)$, $j = \delta, \delta+1, \dots, r_k^+ + r_k^-$, будем называть нормированной системой обобщенных собственных функций оператора $\mathcal{L}$, соответствующей значению μ (ниже будет ясно, что рассмотренные значения μ принадлежат непрерывному спектру оператора $\mathcal{L}$).

В случае, когда оператор $\mathcal{L}$ имеет собственные значения, рассмотрим также некоторую ортонормированную систему $\{\psi_j : j = 1, 2, \dots\}$ собственных функций оператора $\mathcal{L}$, полную в замыкании линейной оболочки всех собственных функций оператора $\mathcal{L}$. Ясно, что если точечный спектр T оператора $\mathcal{L}$ конечный (счетный), то система собственных функций ψ_j тоже конечная (счетная).

Теорема. Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ справедливо разложение Фурье

$$f(x) = \sum_j \psi_j(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi_j(t)}\, dt + \sum_{k=\delta}^{\varpi} \sum_{j=\delta}^{r_k^+ + r_k^-} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} \Phi_j(\mu)\varphi_j(x, \mu)\, d\mu\ , \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

а также равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \sum_j \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi_j(t)}\, dt \right|^2 + \sum_{k=\delta}^{\varpi} \sum_{j=\delta}^{r_k^+ + r_k^-} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} \left| \Phi_j(\mu) \right|^2 d\mu\ , \qquad (5)$$

где

$$\Phi_j(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\varphi_j(t, \mu)}\, dt, \qquad (6)$$

причем последний интеграл в (4) и интеграл (6) сходятся по норме пространств $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mu_k, \mu_{k+1})$ соответственно (в случае отсутствия собственных значений оператора $\mathcal{L}$ первые суммы в (4) и (5) тоже отсутствуют).

Следствие. Непрерывный спектр оператора $\mathcal{L}$ в случае нечетного порядка m совпадает с $\mathbb{R}$, а в случае четного m – с промежутком $[\mu_1, \infty)$.

В случае, когда в условиях (1) $a_k^+ = a_k^- = a_k$, $k = 1, 2, ..., m-2$, возникает один многочлен $Q(\lambda) = \lambda^m + \sum_{k=0}^{m-2} a_k \lambda^k$, и поэтому полученные формулы несколько упрощаются. Однако при помощи замены переменной $\mu = Q(\lambda)$ формулы (4) и (5) можно еще упростить.

При каждом $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого $Q'(\lambda) \neq 0$, рассмотрим уравнение $Q(\xi) = Q(\lambda)$ относительно $\xi \in \mathbb{C}$. Число вещественных корней этого уравнения обозначим через $2\omega(\lambda) + 1 - \delta$. Ясно, что $\omega(\lambda)$ является постоянной функцией от λ в каждом интервале, где производная Q' не обращается в нуль. Вещественные корни уравнения $Q(\xi) = Q(\lambda)$ обозначим через $\xi_\nu(\lambda)$, $\nu = \delta, \delta + 1, ..., 2\omega(\lambda)$. Будем считать, что эти корни пронумерованы так, чтобы каждый из них был аналитической функцией от λ в каждом интервале постоянства функции $\omega(\lambda)$, возрастающей при $\delta \le \nu \le \omega(\lambda)$ и убывающей при $\omega(\lambda) < \nu \le 2\omega(\lambda)$. Очевидно, один из корней $\xi_\nu(\lambda)$, $\delta \le \nu \le \omega(\lambda)$, совпадает с λ.

При любом $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого $Q(\lambda) \notin M \cup T$, дифференциальное уравнение $l(u) = Q(\lambda)u$ имеет единственное ограниченное решение $u(x, \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$, для которого в случае $Q'(\lambda) > 0$ справедливы асимптотические равенства

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{ix\lambda} + \sum_{\nu=\omega(\lambda)+1}^{2\omega(\lambda)} \sqrt{\left| \xi_\nu'(\lambda) \right|}\, S_\nu^+(\lambda) e^{ix\xi_\nu(\lambda)} \right\} + o(1), \qquad x \to \infty,$$

$$u(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\nu=\delta}^{\omega(\lambda)}\sqrt{\xi_\nu'(\lambda)}\,S_\nu^-(\lambda)e^{ix\xi_\nu(\lambda)}+o(1),\quad x\to-\infty,$$

а в случае $Q'(\lambda)<0$ – асимптотические равенства

$$u(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\nu=\delta}^{\omega(\lambda)}\sqrt{\xi_\nu'(\lambda)}\,S_\nu^+(\lambda)e^{ix\xi_\nu(\lambda)}+o(1),\quad x\to\infty,$$

$$u(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{ix\lambda}+\sum_{\nu=\omega(\lambda)+1}^{2\omega(\lambda)}\sqrt{\left|\xi_\nu'(\lambda)\right|}\,S_\nu^-(\lambda)e^{ix\xi_\nu(\lambda)}\right\}+o(1),\quad x\to-\infty.$$

В этих асимптотических равенствах выполняются соотношения

$$\sum_{\nu=\delta}^{\omega(\lambda)}\left|S_\nu^\mp(\lambda)\right|^2+\sum_{\nu=\omega(\lambda)+1}^{2\omega(\lambda)}\left|S_\nu^\pm(\lambda)\right|=1.$$

Беря в качестве первой из матриц (3) единичную матрицу, из (4) и (5) получим равенства

$$f(x)=\sum_j\psi_j(x)\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\psi_j(t)}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)u(x,\lambda)\,d\lambda,\tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\sum_j\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\psi_j(t)}\,dt\right|^2+\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,d\lambda,$$

где

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{u(x,\lambda)}\,dx,\tag{8}$$

причем последний интеграл в (7) и интеграл (8) сходятся по норме $L^2(\mathbb{R})$.

Кафедра математики экономического факультета,
кафедра дифференциальных уравнений

Поступила 12.03.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. **Петросян А.Г.** – Ученые записки ЕГУ, 2003, № 3, с. 8–15.
3. **Хачатрян И.Г.** – Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1984, т. 19, № 4, с. 265–279.
4. **Хачатрян И.Г.** – Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1983, т. 18, № 5, с. 394–402.

Ա. Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՈՐՈՇԱԿԻ ՎԱՐՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԳՈՐԾԱԿԻՑ-ՆԵՐՈՎ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԸՍՏ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է $L^2(\mathbb{R})$ տարածությունում $m\ge 2$ կարգի սովորական գծային ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատոր, որի գործակիցներն ունեն որոշակի վարք անվերջությունում: Դո՛ւրս է բերվում Ֆուրյեի վերլուծության բանաձև այդ օպերատորի ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների մինիմալ համակարգի միջոցով:

A. H. PETROSYAN, I. G. KHACHATRYAN

ABOUT EXPANSION BY EIGEN FUNCTIONS SELF-ADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR'S WITH COEFFICIENTS HAVING PRECISE BEHAVIOUR IN INFINITY

Summary

In $L^2(\mathbb{R})$ space an $m \geq 2$ order self-adjoint differential operator is observed, the coefficients of which have precise behaviour in infinity. A Furei expansion formula is derived by means of minimal system of general eigen functions of this operator.