

*Механика*

УДК 62.50

Л. А. МАЗМАНЯН

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ  
УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ**

Исследуется задача об оптимальном управлении линейных колебаний пластинки при помощи противоборствующих сил, приложенных к поверхностям пластинки. Решается она методом Фурье и приводится к игровой задаче для бесконечной линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью метода экстремального прицеливания определяются оптимальные управляющие силы. Указываются условия, при которых действующие силы, принадлежащие классу  $L_2$ , гасят колебательное движение пластинки, если ресурсы первого игрока больше, чем второго. В конце статьи приведен численный пример.

1. Рассмотрим линейные колебания шарнирно опертой прямоугольной пластинки ( $a \times b$ ) плотности  $\rho$ , постоянной толщины  $h$ , свободно смещающейся в плоскости опорного контура [1]. Координатные оси  $x, y$  направим вдоль сторон опорного контура. Пусть на поверхности пластинки действуют две перпендикулярные силы:  $F_1(x, y, t)$  и  $F_2(x, y, t)$ . Поперечное перемещение срединной поверхности пластинки обозначим через  $w(x, y, t)$ .

Дифференциальное уравнение линейных колебаний будет [1]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_1(x, y, t) + F_2(x, y, t), \quad (1.1)$$

где  $D$  – жесткость пластинки, а  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ .

Края пластинки удовлетворяют следующим условиям шарнирного опирания:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Пусть начальные условия будут

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \dot{w}(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (1.3)$$

где  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  – соответственно начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности.

Условия (1.2) шарнирного опирания будут удовлетворены, если прогиб представить в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b}, \quad (1.4)$$

а функции  $F_1$  и  $F_2$  –

$$\begin{aligned} F_1(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn}(t) \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b}, \\ F_2(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{mn}(t) \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Далее перейдем к следующим безразмерным обыкновенным дифференциальным уравнениям, описывающим линейные колебания пластинки [1, 2]:

$$\frac{d^2 \xi_{mn}(t)}{dt^2} = -\omega_{mn}^2 \xi_{mn}(t) + u_{mn}(t) + v_{mn}(t) \quad (m, n = 1, 2, \dots), \quad (1.6)$$

$$\text{где } \xi_{mn}(t) = \frac{f_{mn}(t)}{h}, \quad u_{mn} = \frac{g}{\gamma h} \bar{u}_{mn}(t), \quad v_{mn} = \frac{g}{\gamma h} \bar{v}_{mn}(t).$$

Квадрат частоты собственных колебаний при малых прогибах имеет вид

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4 m^4 \left(1 + \frac{n^2}{m^2} \bar{\lambda}^2\right)^2}{12 \bar{\lambda}^2 (1 - \mu^2)} \left(\frac{ch}{ab}\right)^2, \quad (1.7)$$

$$\text{где } \bar{\lambda} = \frac{a}{b}, \quad c = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \quad (\omega_{mn}^2 > 0, \quad m, n = 1, 2, \dots).$$

Предполагаем, что силы  $F_1(x, y, t)$  и  $F_2(x, y, t)$  принадлежат классу  $L_2$  и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^a \int_0^b [F_1(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} &= \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq P, \\ \left[ \int_0^a \int_0^b [F_2(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} &= \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq Q \end{aligned} \quad (1.8)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$ . Здесь  $P, Q, T$  – заданные положительные числа.

Рассмотрим следующую игровую ситуацию. Пусть первый игрок,

распоряжающийся управлениями  $u_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ), стремится минимизировать значение величины  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\xi_{mn}^2(\vartheta) + \dot{\xi}_{mn}^2(\vartheta)]$  при самом упорном сопротивлении второго игрока, распоряжающегося управляющими воздействиями  $v_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ), а второй игрок, в свою очередь, стремится максимизировать значение величины  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\xi_{mn}^2(\vartheta) + \dot{\xi}_{mn}^2(\vartheta)]$  при самом упорном сопротивлении со стороны первого игрока. Величину  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta \leq T$ ) определим ниже. Динамика игры определяется бесконечной системой дифференциальных уравнений (1.6). С помощью метода экстремального прицеливания были построены оптимальные управляющие воздействия каждого игрока и гипотетическое рассогласование [2, 3]:

$$u_{mn}(\tau) = - \frac{P [l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau)]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[ \sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} (l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau))^2 \right]^{1/2}},$$

$$v_{mn}(\tau) = \frac{Q [l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau)]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[ \sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} (l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau))^2 \right]^{1/2}}, \quad (1.9)$$

$$\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = \max_{\sum_{m,n=1}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] \leq 1} \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} a_{mn} + l_{mn}^{(2)} b_{mn}] - \right. \\ \left. - (P - Q) \int_t^T \left[ \sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} (l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau))^2 \right]^{1/2} d\tau \right\}, \quad (1.10)$$

где

$$a_{mn} = z_{mn}^{(1)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) + z_{mn}^{(2)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t),$$

$$b_{mn} = z_{mn}^{(2)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) - z_{mn}^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t),$$

$$z_{mn}^{(1)} = \xi_{mn}, \quad z_{mn}^{(2)} = \frac{\dot{\xi}_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

При условии  $P > Q$  выражение в фигурных скобках в формуле (1.10) является вогнутой функцией по переменным  $l_{rj}^{(1)}$  и  $l_{rj}^{(2)}$  ( $r, j = 1, 2, \dots$ ) [4], следовательно, максимум в (1.10) при любых  $z_{mn}^{(1)}(t)$ ,  $z_{mn}^{(2)}(t)$  достигается на единственном векторе  $(l_{mn}^{(1)})^0, (l_{mn}^{(2)})^0$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ), т.е. при любых началь-

ных значениях игровая ситуация регулярна. Получены уравнения, из которых выводятся компоненты вектора  $l^0$  [2, 3].

Заметим, что  $\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T)$  – ограниченная величина, так как ряды, участвующие в выражениях (1.10), сходятся, следовательно, оптимальные управляющие воздействия, определяемые формулой (1.9) равномерно по  $t \in [0, T]$ , составляют сходящиеся квадратом ряды [3]. Для определения момента  $\mathcal{G}$  в каждой ситуации нужно найти наименьший корень уравнения:

$$\min_{t \in [t_*, T]} \varepsilon^{(0)}(t_*, \{z_{mn}^{(1)}(t_*), z_{mn}^{(2)}(t_*)\}, \tau) = \varepsilon^{(0)}(t_*, \cdot, \mathcal{G}). \quad (1.11)$$

2. В этом разделе будем исследовать простейший случай, когда пластинка совершает колебания с наименьшей частотой с образованием одной полуволны по направлению каждой стороны ( $m=1, n=1$ ).

В рассматриваемом случае гипотетическое рассогласование примет следующий вид:

$$\varepsilon^{(0)}(\cdot) = \max_{l_{11}^{(1)2} + l_{11}^{(2)2} = 1} \left\{ l_{11}^{(1)} a_{11} + l_{11}^{(2)} b_{11} - \frac{P-Q}{\sqrt{\lambda_{11}}} \int_0^T \sqrt{(l_{11}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau) + l_{11}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau))^2} dt \right\}, \quad (2.1)$$

где

$$a_{11} = z_{11}^{(1)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{11}}(T-t) + z_{11}^{(2)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{11}}(T-t),$$

$$b_{11} = z_{11}^{(2)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{11}}(T-t) - z_{11}^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{11}}(T-t),$$

а управляющие воздействия

$$u_{11}(\tau) = - \frac{P [l_{11}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau) + l_{11}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau)]}{\sqrt{(l_{11}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau) + l_{11}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau))^2}}, \quad (2.2)$$

$$v_{11}(\tau) = \frac{Q [l_{11}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau) + l_{11}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau)]}{\sqrt{(l_{11}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau) + l_{11}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{11}}(T-\tau))^2}}.$$

Для численного примера возьмем пластинку из стали, которая имеет следующие значения параметров:  $a=0,2\text{м}$ ,  $b=0,1\text{м}$ ,  $h=0,001\text{м}$ ,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $E=200 \text{ ГПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $P=8$ ,  $Q=2$ ,  $t=0$ ,  $z_{11}^{(1)}=500$ ,  $z_{11}^{(2)}=600$ ,  $c$  – скорость распространения продольных упругих волн  $\left( c = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 50637 \right)$ , а частота собственных колебаний при малых прогибах будет иметь вид

$$\lambda_{11} = \omega^2 = \frac{\pi^4 (1 + \lambda^2)^2}{12 \lambda^2 (1 - \mu^2)} \left( \frac{ch}{ab} \right)^2 \approx 3,6 \cdot 10^6, \text{ где } \lambda = \frac{a}{b}.$$

С помощью программы «Математика 5.0» вычислены  $(I_{11}^{(1)})^0, (I_{11}^{(2)})^0$ , следовательно, и гипотетическое рассогласование из (2.1), и оптимальные управляющие воздействия из (2.2). Ниже представлены зависимости  $Plot[\varepsilon^0, \{T; 0; 26\}]$  (рис. 1),  $Plot[u^0, \{\tau; 0; 0,005\}]$  (рис. 2) и  $Plot[v^0, \{\tau; 0; 0,005\}]$  (рис. 3).

Из анализа рис. 1 можно сделать вывод, что при  $P > Q$  первый игрок, распоряжающийся управлением  $u_{11}^0$  (рис. 2), минимизирует откло-

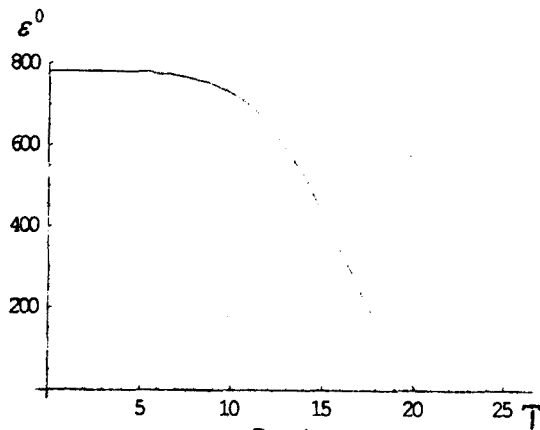


Рис. 1.

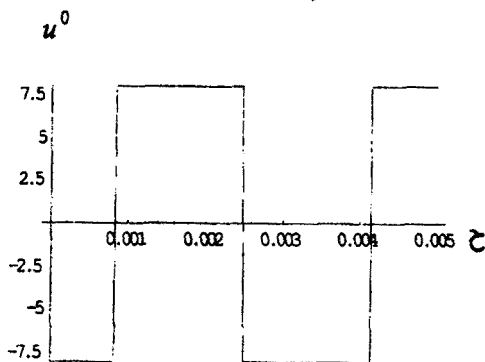


Рис. 2.

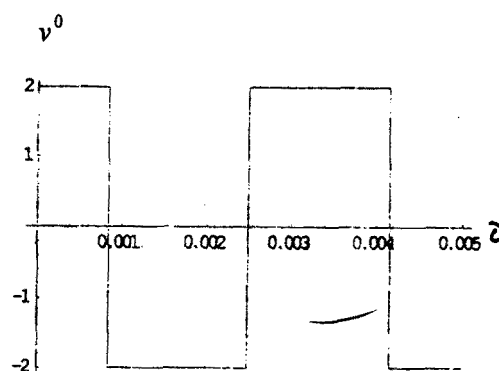


Рис. 3.

нение пластинки от положения равновесия при самом упорном сопротивлении со стороны второго игрока (рис. 3).

Кафедра теоретической механики

Поступила 26.09.2003

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
2. Мазманян Л.А. Об оптимальном управлении линейных колебаний пластинки в конфликтных ситуациях. – Сб. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ер., 2002, с. 48–52.
3. Габриелян М.С. – Изв. НАН РА, Механика, 1998, № 4, с. 72–76.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Լ. Ա. ՄԱԶՄԱՆՅԱՆ

ԱՌԱՉԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՂԱԿԱՆ ԸԱՐԺՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ  
ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ՀԱԿԱՍԵՏ ԻՐԱՎԻՃԱԿՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկված է սալի գծային տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ նրա վրա ազդում են բաշխված հակամետ ուժեր: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի եղանակով և բերված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներով բնութագրվող խաղային խնդրի: Խաղացողների օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները որոշված են էքստրեմալ նշանառության եղանակով: Ցույց է տրված, որ եթե առաջին խաղացողի ռեսուրսները ավելի շատ են, քան երկրորդ խաղացողինը, և ազդող ուժերը պատկանում են  $L_2$  դասին, ապա լուծվում է սալի տատանումների մարման խնդիրը: Աշխատանքի վերջում բերված է թվային օրինակ:

L. A. MAZMANYAN

ON THE OPTIMAL CONTROL FOR THE ELASTIC PLATE'S  
VIBRATIONS IN THE CONFLICT SITUATIONS

Summary

It is discussed the problem of an optimal control for the plate's linear vibrations, when the distributive disposed forces influence on it. The problem is solved by the method of Fourie and it is brought to the differential game, which is described by the infinitesimal differential equations of second order. The extremal strategies are constructed by the extreme targeting method. It is shown that if the resources of the first player are more than the resources of the second player and the influencing forces belong to class  $L_2$ , then the problem of damping of plate's vibrations is solved. In the end of the article a numerical example is given.