ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2004 Естественные науки

Математика

УДК 517.53

М. С. МАРТИРОСЯН

РАВНОМЕРНОЕ СУММИРОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО НЕПОЛНЫМ СИСТЕМАМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

Биортогональные разложения функций класса Харди $\mathbf{H}^p(1<p<\infty)$ по неполной системе рациональных функций равномерно суммируются на компактных подмножествах комплексной плоскости, лежащих на положительном расстоянии от множества полюсов функций данной системы.

Введение. Рассмотрим систему рациональных функций

$$e_{ks}(z)=\frac{s!}{2\pi i}\frac{1}{\left(z-\overline{\lambda_k}\right)^{s+1}},\ k=1,2,\ldots;\ s=0,1,\ldots,m_k-1, \tag{1}$$

где $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность различных комплексных чисел из открытой верхней полуплоскости $\mathbf{G}^{(+)}=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_k\operatorname{Im}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}<\infty. \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{H}_+^p$ – пространство Харди в верхней полуплоскости. Существует ряд работ (см., напр., [1–4]), посвященных различным задачам интерполирования и вопросу базисности системы (1) в своей замкнутой линейной оболочке в пространствах $\mathbf{H}_+^p(1<p<\infty)$. В частности известно (см. [1]), что условие (2) необходимо и достаточно для неполноты системы (1) относительно любого из пространств $\mathbf{H}_+^p(1<p<\infty)$.

Порожденная неполной системой (1), биортогональная система в $\mathbf{H}_+^2$ была введена и систематически использована М.М. Джрбашяном (см. [2–4]). В работе [5] В.Х. Мусояном получено интегральное представление указанной биортогональной системы $\{\varphi_{ks}\}$ и с использованием гильбертовой структуры пространства $\mathbf{H}_+^2$ предложен метод суммирования биортогонального разложения

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)e_{ks}(z) \tag{3}$$

к проекции $f \in \mathbf{H}_+^2$ на подпространство, порожденное системой (1). Коэффициенты биортогонального разложения определяются по формуле $a_{ks}(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi_{ks}(x)}dx$, где $f(x)$ и $\varphi_{ks}(x)$ – функции граничных значений (см., напр., [6]) f и φ_{ks}. Доказано также [7], что если $f \in \mathbf{H}_+^p$ $(1<p<\infty)$, то суммирующая последовательность [5]

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\overline{\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{\overline{z}-\lambda}\right\}_{\lambda=\lambda_k}} \tag{4}$$

(где r_n – n-ый остаток произведения Бляшке в $\mathbf{G}^{(+)}$) сходится по норме пространства $\mathbf{H}_+^p$ и восстанавливает каждую функцию, принадлежащую замыканию линейной оболочки (1) в $\mathbf{H}_+^p$.

Обозначим через $\mathbf{E}_p$ замыкание линейной оболочки системы (1) в пространстве $\mathbf{H}_+^p$. Рассматривая вопрос базисности систем $\{e_{ks}\}$ и $\{\varphi_{ks}\}$ в подпространствах $\mathbf{E}_p$, Джрбашян [3] доказал, что при условиях (2) и

$$\inf_{k\ge1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\overline{\lambda_j}}\right|\right\}\ge\delta>0,\ \ \sup_{k\ge1} m_k<\infty \tag{5}$$

биортогональное разложение (3) равномерно сходится на любом компакте, лежащем вне $\overline{\Lambda}$ – замыкания множества точек $\left\{\overline{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Аналогичный результат получен Айрапетяном [8] для системы

$$e^*_{ks}(z)=\frac{s!}{2\pi i}\frac{z^s}{\left(1-\overline{\alpha_k}z\right)^{s+1}},\ k=1,2,...;\ s=0,1,...,m_k-1, \tag{1'}$$

рассмотренной в пространствах Харди $\mathbf{H}^p(1<p<\infty)$ в единичном круге $\mathbf{D}=\{z:|z|<1\}$, где последовательность различных комплексных чисел $\alpha_k\in\mathbf{D}$ удовлетворяет не только условию неполноты (см. также [9])

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k\left(1-|\alpha_k|\right)<\infty, \tag{2'}$$

но и условию Л. Карлесона

$$\inf_{k\ge1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\alpha_j}{1-\overline{\alpha_j}\alpha_k}\right|\right\}\ge\delta>0,\ \ \sup_{k\ge1} m_k<\infty. \tag{5'}$$

Постановка задачи. Если рассматривать результат [3] с точки зрения задачи нахождения области аналитического продолжения функций класса $\mathbf{E_p}$, то следует отметить, что и без дополнительных условий (5) каждую функцию класса $\mathbf{E}_2$ можно аналитически доопределить на множестве $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$ [4]. При этом [5] суммирующая последовательность (4) равномерно сходится внутри множества $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$. Более того, справедлива следующая [5]

Теорема. Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (1) $\sum_{k=1}^{p_n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)}e_{ks}(z)$ сходится по норме $L^2(-\infty,\infty)$, то она сходится равномерно на каждом компактном подмножестве множества $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$.

В настоящей работе ставится задача доказать равномерную сходимость суммирующей последовательности (4) внутри $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$ в общем случае, когда $f\in\mathbf{H}_+^{\mathbf{p}}(1<p<\infty)$. С учетом [7] для этого достаточно получить L^p-аналог вышеприведенной теоремы.

Ставится также аналогичная задача для системы (1'). Пусть $\mathbf{E}_\mathbf{p}^*$ – замыкание линейной оболочки неполной системы (1') в пространстве $\mathbf{H^p(D)}, 1<p<\infty$, а $\overline{\mathbf{\Lambda}}$ – замыкание множества $\left\{\overline{1/\alpha_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Известно, что если $f\in\mathbf{E}_\mathbf{p}^*$, то по норме $\mathbf{H^p(D)}$ [9–10]

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}(f)\overline{\left\{\frac{d^s}{d\alpha^s}\frac{r_n(\alpha)}{1-\overline{\alpha z}}\right\}_{\alpha=\alpha_k}}, \tag{4'}$$

где $a_{ks}(f)$ – коэффициенты биортогонального разложения функции f по системе (1'), а r_n – n-ый остаток произведения Бляшке в $\mathbf{D}$.

Результат. Пусть $1<p<\infty$.

Теорема 1. Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (1) $\sum_{k=1}^{p_n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)}e_{ks}(z)$ сходится по норме $L^p(-\infty,\infty)$, то она сходится равномерно на каждом компактном подмножестве множества $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$.

Следствие 1.1. Если множество предельных точек последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ не охватывает всю вещественную ось, то функции класса $\mathbf{E_p}$ аналитически продолжаются из $\mathbf{G}^{(+)}$ в $(\mathbf{C}\setminus\mathbf{G}^{(+)})\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$.

Следствие 1.2. Если $f\in\mathbf{E_p}$, то последовательность (4) равномерно сходится на каждом компактном подмножестве множества $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$ к некоторой функции F такой, что $F(z)=f(z),\ z\in\mathbf{G}^{(+)}$.

Теорема 2. Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (1') $\sum_{k=1}^{p_n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} e_{ks}^{*}(z)$ сходится по норме L^p на единичной окружности, то она сходится равномерно на каждом компактном множестве, лежащем вне $\overline{\mathbf{A}}$.

Следствие 2.1. Если множество предельных точек последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ не занимает всю единичную окружность, то функции класса $\mathbf{E}_p^{*}$ аналитически продолжаются из $\mathbf{D}$ в $(\mathbf{C}\setminus\mathbf{D})\setminus\overline{\mathbf{A}}$.

Следствие 2.2. Если $f\in\mathbf{E}_p^{*}$, то последовательность (4') равномерно сходится на каждом компактном подмножестве множества $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{A}}$ к некоторой функции F такой, что $F(z)=f(z),\ z\in\mathbf{D}$.

Приведенные две последние теоремы доказываются одним и тем же методом, поэтому ограничимся доказательством первой из них.

Доказательство теоремы 1. Как известно, условие (2) необходимо и достаточно для существования произведения Бляшке $B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z-\lambda_k}{z-\overline{\lambda}_k}\nu_k\right)^{m_k}$, где $\nu_k=\frac{\left|1+\lambda_k^2\right|}{1+\lambda_k^2}$ при $\lambda_k\neq i$ и $\nu_k=1$ при $\lambda_k=i$. Произведение $B(z)$ равномерно сходится на каждом компактном подмножестве множества $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{A}}$.

Пусть $B_n(z)$ – n-ое частичное произведение $B(z)$. Положим

$$K_n(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{B_n(z)-B_n(t)}{B_n(t)(z-t)},\quad K(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{B(z)-B(t)}{B(t)(z-t)}.$$

Ниже символом $\|\bullet\|_r$ обозначена норма в пространстве $L^r(-\infty,\infty)$.

Лемма 1. Пусть $1<r<\infty$ и $\mathbf{K}$ – компактное множество, лежащее в $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{A}}$. Тогда $\|K_n(z,\bullet)-K(z,\bullet)\|_r \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ равномерно для $z\in\mathbf{K}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{G}^{(0)}$ вещественную ось. Так как почти для всех $t\in\mathbf{G}^{(0)}$ выполняется $|B_n(t)|=|B(t)|=1$, то

$$|K_n(z,t)-K(z,t)|\le\frac{|B_n(z)-B(z)|}{|z-t|}+\frac{|B(z)||B_n(t)-B(t)|}{|z-t|},\ (z,t)\in\left(\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{A}}\right)\times\mathbf{G}^{(0)}. \quad (6)$$

В случае, когда $\mathbf{K}$ не имеет общих точек с $\mathbf{G}^{(0)}$, расстояние $dist\left(\mathbf{K},\mathbf{G}^{(0)}\right)$ положительно. Тогда функция $U(z,t)=\frac{1+|t|}{|z-t|}$, непрерывная на $\mathbf{K}\times\mathbf{G}^{(0)}$, стремится к единице при $|t|\to\infty$ равномерно относительно $z\in\mathbf{K}$.

Поэтому функция $U(z,t)$ ограничена сверху на $\mathbf{K}\times\mathbf{G}^{(0)}$, т.е. существует постоянная $U>0$ такая, что

$$\frac{1}{|z-t|}\le\frac{U}{1+|t|},\ (z,t)\in\mathbf{K}\times\mathbf{G}^{(0)}. \tag{7}$$

Поскольку для любой функции $\varphi\in L^1(-\infty,\infty)$ справедливо предельное соотношение [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty}|B_n(t)-B(t)|^r|\varphi(t)|dt\underset{n\to\infty}{\to}0, \tag{8}$$

то при выборе $\varphi(t)=\left(\dfrac{1}{1+|t|}\right)^r$ и с учетом равномерной сходимости $B_n(z)$ к ограниченной функции $B(z)$ на $\mathbf{K}$ утверждение леммы вытекает из (6), (7) и (8).

Пусть теперь множество $\mathbf{K}\cap\mathbf{G}^{(0)}$ непусто и лежит в некотором конечном интервале $(-E,E)$. Повторяя рассуждения, проведенные в первом рассмотренном случае, получим

$$\int_{|t|>E}|K_n(z,t)-K(z,t)|^r dt\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0,\ z\in\mathbf{K}.$$

Остается доказать, что

$$\int_{-E}^{E}|K_n(z,t)-K(z,t)|^r dt\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0,\ z\in\mathbf{K}. \tag{9}$$

Для произвольного положительного числа ε выберем открытое ограниченное множество $\mathbf{V}$ такое, чтобы $\mathbf{K}\subset\mathbf{V}\subset\overline{\mathbf{V}}\subset\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$, а расстояние $d\equiv dist(\mathbf{K},\partial\mathbf{V})$ было меньше ε ($\overline{\mathbf{V}}$ – замыкание $\mathbf{V}$, а $\partial\mathbf{V}$ – граница $\mathbf{V}$). В силу равномерной сходимости $B_n(z)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}B(z),\ z\in\mathbf{K}$, и предельного соотношения (8) существует натуральное число N, не зависящее от z, такое, что при $n\ge N$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered}|B_n(z)-B(z)|<d^2,\ z\in\mathbf{K},\\ \left\{\int_{-E}^{E}|B_n(t)-B(t)|^r dt\right\}^{\frac{1}{r}}<d^2.\end{gathered} \tag{10}$$

Пусть $\mathbf{K}_d$ – множество точек из $\mathbf{K}$, расстояние которых от интервала $(-E,E)$ меньше d. Положим $M=\max\limits_{z\in\mathbf{K}}|B(z)|$. Если множество $\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}_d$ непусто и $z\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}_d$, то, согласно (6) и (10), имеем

$$\int_{-E}^{E}|K_n(z,t)-K(z,t)|^r dt\le\int_{-E}^{E}\left(d+M\frac{|B_n(t)-B(t)|}{d}\right)^r dt\le$$

$$\leq 2^{r-1}\int_{-E}^{E}\left(d^r+\frac{M^r}{d^r}|B_n(t)-B(t)|^r\right)dt \leq 2^r E d^r + 2^{r-1}M^r d^r \leq \left(E+\frac{M^r}{2}\right)(2\varepsilon)^r,\ n\geq N,$$

следовательно,

$$\int_{-E}^{E}|K_n(z,t)-K(z,t)|^r\,dt \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0,\ z\in \mathbf{K}\setminus\mathbf{K_d}. \tag{11}$$

С любой точкой $z\in\mathbf{K_d}$ ассоциируем отрезок вещественной оси $T_z=\{t\in[-E,E]:\ |z-t|\leq d\}$. Так как $B_n'(z)$ сходится к $B'(z)$ равномерно на $\overline{\mathbf{V}}$, то последовательность функций $|B'(z)|,|B_1'(z)|,|B_2'(z)|,\ldots,|B_n'(z)|,\ldots$ равномерно ограничена сверху на $\overline{\mathbf{V}}$ некоторым числом $B>0$. Тогда

$$|B(z)-B(t)|=\left|\int_{\gamma_{zt}}B'(u)du\right|\leq B|z-t|,\ (z,t)\in\mathbf{K_d}\times T_z,$$

где γ_{zt} – прямолинейный отрезок с концами в точках z и t, целиком лежащий в компакте $\overline{\mathbf{V}}$. Совершенно аналогично получаем $|B_n(z)-B_n(t)|\leq B|z-t|$, $n=1,2,\ldots$; $(z,t)\in\mathbf{K_d}\times T_z$. Поэтому, положив $K(t,t)=\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{B'(t)}{B(t)}$, $K_n(t,t)=\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{B_n'(t)}{B_n(t)}$, $t\in T_z$, $z\in\mathbf{K_d}$, приходим к оценкам

$$|K(z,t)|\leq B,\ |K_n(z,t)|\leq B,\ (z,t)\in\mathbf{K_d}\times T_z,\ n=1,2,\ldots.$$

Следовательно, при $z\in\mathbf{K_d}$ и $n\geq N$ имеем

$$\int_{-E}^{E}|K_n(z,t)-K(z,t)|^r\,dt=\int_{T_z}|K_n(z,t)-K(z,t)|^r\,dt+\int_{[-E,E]\setminus T_z}|K_n(z,t)-K(z,t)|^r\,dt\leq$$

$$\leq(2B)^r|T_z|+\int_{-E}^{E}\left(d+M\frac{|B_n(t)-B(t)|}{d}\right)^r dt\leq(2B)^r 2\varepsilon+\left(E+\frac{M^r}{2}\right)(2\varepsilon)^r$$

и в результате

$$\int_{-E}^{E}|K_n(z,t)-K(z,t)|^r\,dt \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0,\ z\in\mathbf{K_d}. \tag{12}$$

Соотношение (9) вытекает из (11) и (12). Лемма доказана.

Замечание. Норма $\|K(z,\bullet)\|_r$ ограничена на $\mathbf{K}$ за счет ограниченности функции $K(z,t)$ на декартовом произведении $\mathbf{K}\times[-E,E]$. Последнее имеет место ввиду оценок

$$|K(z,t)|\leq\frac{M+1}{d}\ \text{при}\ |z-t|\geq d\ \text{и}\ |K(z,t)|\leq B\ \text{при}\ |z-t|<d.$$

Положим $Q_n(z)=\sum_{k=1}^{p_n}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}^{(n)}e_{ks}(z)$. Известно [5], что

$$Q_n(z)=\int_{-\infty}^{\infty} Q_n(t)K_m(z,t)dt,\ m\geq p_n,\ z\in\mathbf{C}\setminus\left\{\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},...,\overline{\lambda_m}\right\}. \qquad (13)$$

В силу леммы 1, в равенстве (13) при фиксированном n, устремив m в бесконечность, получим

$$Q_n(z)=\int_{-\infty}^{\infty} Q_n(t)K(z,t)dt,\ z\in\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}.$$

Пусть $\mathbf{K}$ – компакт из $\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{\Lambda}}$. Согласно неравенству Гелдера

$$|Q_n(z)-Q_m(z)|\leq\|Q_n-Q_m\|_p\|K(z,\bullet)\|_q,\ z\in\mathbf{K},\ pq=p+q$$

для любой пары натуральных чисел n и m. Но поскольку функция $\|K(z,\bullet)\|_r$ ограничена на $\mathbf{K}$, то из последней оценки вытекает, что сходимость последовательности Q_n по норме $L^p(-\infty,\infty)$ гарантирует ее равномерную сходимость на $\mathbf{K}$.

Кафедра математического анализа *Поступила 29.04.2004*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мартиросян В.М.** – Изв. АН Арм. ССР, Матем., 1978, т. 13, № 5–6, с. 490–531.
2. **Джрбашян М.М.** – Мат. сборник, 1974, т. 95 (137), с. 418–444.
3. **Джрбашян М.М.** – Изв. АН СССР, Матем., 1978, т. 42, № 6, с. 1323–1384.
4. **Джрбашян М.М.** – Мат. сборник, 1981, т. 114 (156), № 1, с. 3 – 84.
5. **Мусоян В.Х.** – Изв. АН Арм. ССР, Матем., 1986, т. 21, № 2, с. 163–186.
6. **Гофман К.** – Банаховы пространства аналитических функций, М.: ИЛ, 1975.
7. **Мартиросян М.С.** – Изв. НАН РА, Матем., 1997, т. 32, № 6, с. 30 – 38.
8. **Айрапетян Г.М.** – Изв. АН Арм. ССР, Матем., 1975, т. 10, № 2, с. 133–152.
9. **Мартиросян М.С., Мусоян В.Х.** – Изв. НАН РА, Матем., 1997, т. 32, № 5, с. 32– 44.
10. **Геворгян Н.А., Мусоян В.Х.** – Ученые записки ЕГУ, 1990, № 2.

Մ. Ս. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ԵՐԿՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄ ԸՍՏ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՉ ԼՐԻՎ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՐԴԻԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հարդիի $\mathbf{H}^p(1<p<\infty)$ դասի ֆունկցիայի երկօրթոգոնալ վերլուծությունն ըստ ռացիոնալ ֆունկցիաների ոչ լրիվ համակարգի հավասարաչափ գումարվում է կոմպլեքս հարթությունում համակարգի ֆունկցիաների բևեռների բազմությունից դրական հեռավորության վրա գտնվող կոմպակտ բազմությունների վրա:

M. S. MARTIROSYAN

THE UNIFORMLY SUMMATION OF BIORTHOGONAL EXPANSIONS BY THE INCOMPLETE SYSTEM OF RATIONAL FUNCTIONS IN HARDY'S SPACES

Summary

The biorthogonal expansions in Hardy's $\mathbf{H}^p(1<p<\infty)$ spaces by the incomplete system of rational functions are uniformly summated on the compact subsets of complex plane on positive distance from the set of poles of system's functions.