ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2005 Естественные науки

Математика

УДК 518.9

О. С. МИКАЕЛЯН, Р. В. ХАЧАТРЯН

ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ В ИГРЕ С ЧАСТИЧНОЙ КООПЕРАЦИЕЙ

В данной работе рассматривается частично-кооперативная игра в развернутой форме. Предлагается способ нахождения оптимального поведения игроков и значения для таких игр. В ходе игры при определении дележа между игроками коалиции рассматриваются вспомогательные игры и равновесные по Нэшу ситуации в них. Приведен пример.

Введение. На основе конечных позиционных игр n лиц с полной информацией и терминальными функциями выигрыша в работе [1] приведено построение оптимальной траектории для частично-кооперативной игры. При этом был использован вектор Шепли во вспомогательной кооперативной игре при определении дележа суммарного выигрыша коалиции. Условие частичной кооперации лишь увеличивает возможности игроков, нежели условия полной кооперации для многошаговых и многоуровневых игр [2, 3]. В рассматриваемой частично-кооперативной игре мы методологически следуем построениям из [1] и используем введенный там алгоритм, который назовем алгоритмом Петросяна–Аешина. Для нахождения доли игрока из коалиции здесь используются выигрыши игроков, соответствующие равновесным по Нэшу исходам [4]. Во вспомогательной игре в качестве игрока может выступить некая коалиция игроков.

1. Основная модель. Пусть Γ – динамическая позиционная игра n лиц с полной информацией. Обозначим множество игроков через $N=\{1,\dots,n\}$. Пусть $K(x_0)$ есть дерево игры с начальной позицией x_0. Согласно определению позиционной игры, на $K(x_0)$ задано разбиение множества позиций на $n+1$ множество $P_1,\dots,P_n,P_{n+1}$, где P_i – множество личных позиций игрока i, а P_{n+1} – множество окончательных позиций. Выигрыши игроков в Γ определяются вещественнозначными функциями $h_i : P_{n+1} \to R^1_+$, $i \in N$.

Под частично-кооперативным поведением игрока будем понимать такое поведение, при котором игрок может как кооперироваться, так и играть индивидуально. Игрока, принимающего решение в позиции x обозначим

$i(x)$. Изменим позиционную игру Γ, предполагая, что игроки могут кооперироваться при определенных условиях. Трансформированную игру назовем игрой с частичной кооперацией или частично-кооперативной игрой и будем обозначать ее снова через Γ.

Определение. Пусть $i \in N$. Функция $f_i : P_i \to \{0, 1\}$ называется кооперативной функцией игрока i, если для любого пути $\{x_0, ..., x', x'', ..., \bar{x}\}$, где $x' \in P_i$ и $\bar{x} \in P_{n+1}$, из условия $f_i(x') = 1$ следует, что для всех позиций $y \in P_i \cap \{x'', ..., \bar{x}\}$, если они существуют, $f_i(y) = 1$.

Вектор-функция $f = (f_1, ..., f_n)$ называется кооперативной функцией игры, которая позволяет указать коалицию $C(x)$ в каждой позиции x:

$$C(x) = \begin{cases} S_f(x), & \text{если } f_i(x) = 1, \\ \{i\}, & \text{если } f_i(x) = 0, \end{cases}$$

где

$$S_f(x) = S_f^1(x) \cup S_f^2(x),$$

а

$$S_f^1(x) = \{ j \in N \mid P_j \cap K(x) = \varnothing \text{ и } \exists \ y \in P_j \cap \{x_0, ..., x\} : f_j(y) = 1 \},$$

$$S_f^2(x) = \{ j \in N \setminus S_f^1(x) \mid f_j(y) = 1 \ \ \forall \ y \in P_j \cap K(x) \}.$$

Множество $S_f^1(x)$ состоит из игроков, которые проявили кооперативную активность вдоль пути, ведущего в x, и не принимают решений в ходе последующего развития игры на поддереве $K(x)$ с начальной позицией x. Множество $S_f^2(x)$ включает игроков, которые кооперируются во всех своих личных позициях поддерева $K(x)$. Говоря, что игрок $i \in N$ придерживается кооперативного поведения в позиции $x \in K(x_0)$, мы будем иметь в виду, что в позиции x игрок i принимает решение, исходя из интересов коалиции. Игроки из множества $N \setminus S_f(x)$ рассматриваются в позиции x как индивидуальные игроки. Поскольку $S_f(x)$ определяется кооперативной функцией f, вся коалиционная структура в позиции $x : S_f(x),\ \{j_1\},\ \{j_2\}, ..., \{j_{|N \setminus S_f(x)|}\}$ также формируется в зависимости от f.

Игра $\Gamma_f(x_0)$ создается на основе частично-кооперативной игры Γ с использованием кооперативной функции f. Дерево игры $\Gamma_f(x_0)$ совпадает с деревом $K(x_0)$ игры Γ. Множество N_f участников игры $\Gamma_f(x_0)$ формируется с учетом кооперативной функции f и состоит из подмножеств множества N игроков игры Γ: $N_f = \{ C \subset N : \exists \, x \in K(x_0), C(x) = C \}$. Коалиция $C \in N_f$ будет рассматриваться в качестве участника игры. Выигрыш игрока $C \in N_f$ игры $\Gamma_f(x_0)$ определяется на множестве окончательных позиций дерева игры $K(x_0)$ как сумма выигрышей игроков $i \in C$ игры Γ: $h_S(x) = \sum_{i \in C} h_i(x)$, $x \in P_{n+1}$, $h_i(x) \geq 0$, $i \in N$.

Возможен случай, когда игрок, несмотря на то что он находится в позиции своего кооперативного поведения, играет индивидуально.

2. Алгоритм построения оптимального пути. Решение игры $\Gamma_f(x_0)$ строим методом обратной индукции, двигаясь от окончательных позиций к начальной. Пусть x – некоторая позиция. Обозначим через $Z(x)$ множество позиций, непосредственно следующих за x, а игрока, принимающего решение в позиции x, $x \in P_i$, в игре Γ, через $i(x) \in N$. Скажем, что решение игрока $i(x)$ в позиции x ведет в позицию $\bar{x} \in Z(x)$. Введем вспомогательную функцию c_f, определяемую с помощью кооперативной функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$:

$$c_f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_{i(x)}(x) = 1, \\ 0, & \text{если } f_{i(x)}(x) = 0. \end{cases}$$

Начальный шаг. Рассмотрим множество окончательных позиций P_{n+1}. Коалиционная структура в позиции $x \in P_{n+1}$ совпадает с коалиционной структурой в позиции x_1, $x \in Z(x_1)$. Согласно кооперативной функции f, в позиции x_1 формируются коалиции $S_f(x_1), \{j_1\}, \ldots, \{j_{|N \setminus S_f(x_1)|}\}$. Выигрыш игрока $i_f = S_f(x_1)$ в позиции $x \in Z(x_1)$ равен $\sum_{i \in S_f(x_1)} h_i(x)$. Выигрыш игрока $i_f = \{j_k\}$, $k = 1, \ldots, |N \setminus S_f(x_1)|$, в позиции x составляет $h_{j_k}(x)$.

Шаг 1. Перейдем из окончательных позиций $Z(x_1)$, $x_1 \in X_1$, к предшествующим. Рассмотрим позицию x_1. Предположим, что $c_f(x_1) = 1$. Тогда игрок $i(x_1) \in N$ кооперируется и в позиции x_1 делает ход игрок $i_f(x_1) = S_f(x_1)$, $i_f(x_1) \in N_f$. Мы предписываем игроку $i_f(x_1)$ выбирать позицию $\bar{x}_1 \in Z(x_1)$ из условия

$$\max_{x \in Z(x_1)} \sum_{i \in S_f(x_1)} h_i(x) = \sum_{i \in S_f(x_1)} h_i(\bar{x}_1).$$

Если $c_f(x_1) = 0$, то игрок $i(x_1)$ не кооперируется. Отсюда $i_f(x_1) = \{i(x_1)\}$. В этом случае мы предписываем игроку $i_f(x_1)$ выбрать позицию $\bar{x}_1$ из условия $\max_{x \in Z(x_1)} h_{i(x_1)}(x) = h_{i(x_1)}(\bar{x}_1)$.

Вместо рассмотрения терминальных функций h_i, $i \in N$, на множестве P_{n+1} окончательных позиций мы можем использовать функции $r_i^1 : X_1 \to R_+^1$, $i \in N$, задаваемые на множестве X_1:

$$r_i^1(x_1) = \begin{cases} h_i(\bar{x}_1), & \text{если } x_1 \notin P_{n+1}; \\ h_i(x_1), & \text{если } x_1 \in P_{n+1}. \end{cases}$$

Шаг 2. Найдем решения игроков $i_f \in N_f$ в позициях $x_2 \in X_2$. Если на множестве X_1 известны выигрыши каждого игрока $i_f(x_2) \in N_f$, $x_2 \in X_2$, то мы можем построить путь игры на поддеревьях $K(x_2)$, $x_2 \in X_2$.

Рассмотрим множество $Y(x_2) = Y_1(x_2) \cup Y_2(x_2)$, где

$$Y_1(x_2) = \{x \in Z(x_2) \mid c_f(x_2) = 0, \quad i(x_2) \in S_f(x)\} \text{ и}$$

$$Y_2(x_2) = \{x \in Z(x_2) \mid c_f(x_2) = 1, \quad S_f(x) \setminus S_f(x_2) \neq \varnothing\}.$$

Для каждой позиции $x_2 \in X_2$ мы рассмотрим два основных случая.

1) Предположим, что $Y(x_2) = \varnothing$. Пусть $c_f(x_2) = 0$. Следовательно, в позиции x_2 принимает решение игрок $i_f(x_2) = \{i(x_2)\}$. Мы предписываем игроку $i_f(x_2)$ выбрать позицию $\bar{x}_2 \in Z(x_2)$ из условия $\max\limits_{x \in Z(x_2)} r_{i(x_2)}^1(x) = r_{i(x_2)}^1(\bar{x}_2)$. Теперь допустим, что $c_f(x_2) = 1$. Поскольку $Y(x_2) = \varnothing$, коалиции $S_f(x_2)$ и $S_f(x_1)$ совпадают. В этом случае мы предписываем игроку $i_f(x_2) = \{i(x_2)\}$ выбрать позицию $\bar{x}_2 \in Z(x_2)$ из условия $\max\limits_{x \in Z(x_2)} \sum\limits_{i \in S_f(x_2)} r_i^1(x) = \sum\limits_{i \in S_f(x_2)} r_i^1(\bar{x}_2)$.

2) Предположим, что $Y(x_2) \neq \varnothing$. Возникает неопределенность с выигрышами коалиции $i_f(x_2) = \{i(x_2)\}$ при $c_f(x_2) = 0$ и коалиции $i_f(x_2) = S_f(x_2)$ при $c_f(x_2) = 1$. Чтобы построить путь игры на поддереве $K(x_2)$, необходимо найти некоторый дележ выигрыша коалиции $S_f(y_1)$ для каждой позиции $y_1 \in Y(x_2)$. Рассмотрим вспомогательную игру $\Gamma_f(y_1)$ на поддереве $K(y_1)$ с множеством игроков $S_f(y_1), \{j_1\}, \ldots, \{j_{|N \setminus S_f(y_1)|}\}$. Стратегии игроков вне коалиции $S_f(y_1)$ фиксированы и совпадают с равновесными по Нэшу стратегиями в основной игре. Соответствующий исход обозначим через x. Определим коэффициент кооперации α_i для игрока $i \in S_f(y_1)$, $\alpha_i = \dfrac{h_i(x)}{\sum\limits_{k \in S_f(y_1)} h_k(x)}$. Предпишем тогда игроку $i \in S_f(y_1)$ в игре $\Gamma_f(y_1)$ выигрыш, равный

$$\alpha_i v_f\left(y_1,\ S_f(y_1),\{j_1\},\{j_2\},\ldots,\left\{j_{|N\setminus S_f(y_1)|}\right\}\right)=Nh_i^f(y_1),$$

где $v_f\left(y_1,\ S_f(y_1),\{j_1\},\{j_2\},\ldots,\left\{j_{|N\setminus S_f(y_1)|}\right\}\right)=\sum\limits_{i\in S_f(y_1)} r_i^1(y_1)$ – выигрыш коалиции $S_f(y_1)$. Оптимальным дележом суммарного выигрыша коалиции $S_f(y_1)$ в игре $\Gamma_f(y_1)$ будет вектор $Nh^f(y_1)=\left(Nh_{k_1}^f(y_1),\ldots,Nh_{k_{|S_f(y_1)|}}^f(y_1)\right)$, где $\sum\limits_{j=1}^{|S_f(y_1)|} Nh_{k_j}^f(y_1)=v_f\left(y_1,S_f(y_1),\{j_1\},\{j_2\},\ldots,\left\{j_{|N\setminus S_f(y_1)|}\right\}\right)$.

Если игрок $\{i(x_2)\}\in N_f$ в позиции x_2 выбирает позицию $y_1\in Y(x_2)$, то его выигрыш определяется с помощью вектора $Nh^f(y_1)$ и равен $Nh_{i(x_2)}^f(y_1)$. Таким образом, на множестве X_1 задается новая функция выигрышей $\bar{r}_i^1: X_1\to R_+^1$, $i\in N$, такая, что для $x_1\in Z(x_2)$

$$\bar{r}_i^1(x_1)=\begin{cases} Nh_i^f(x_1), & \text{если } x_1\in Y(x_2),\ i\in S_f(x_1);\\ r_i^1(x_1) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Предположим, что $c_f(x_2)=0$. Тогда для игрока $i_f(x_2)=\{i(x_2)\}$ оптимальной является реализация пути, проходящего через позицию $\bar{x}_2\in Z(x_2)$, которая удовлетворяет условию $\max\limits_{x\in Z(x_2)}\bar{r}_{i(x_2)}^1(x)=\bar{r}_{i(x_2)}^1(\bar{x}_2)$.

Теперь пусть $c_f(x_2)=1$. Так как игрок $i(x_2)$ кооперируется, то в позиции x_2 совершает ход коалиция $i_f(x_2)=S_f(x_2)$. Мы предписываем ей выбрать позицию $\bar{x}_2$, удовлетворяющую условию

$$\max_{x\in Z(x_2)}\sum_{i\in S_f(x_2)}\bar{r}_{i(x_2)}^1(x)=\sum_{i\in S_f(x_2)}\bar{r}_{i(x_2)}^1(\bar{x}_2).$$

Таким образом, путь на каждом поддереве $K(x_2)$, $x_2\in X_2$, построен и

$$r_i^2(x_2)=\begin{cases} r_i^1(\bar{x}_2), & \text{если } Y(x_2)=\varnothing;\\ \bar{r}_i^1(\bar{x}_2), & \text{если } Y(x_2)\neq\varnothing;\\ h_i(x_2), & \text{если } x_2\in P_{n+1}.\end{cases}$$

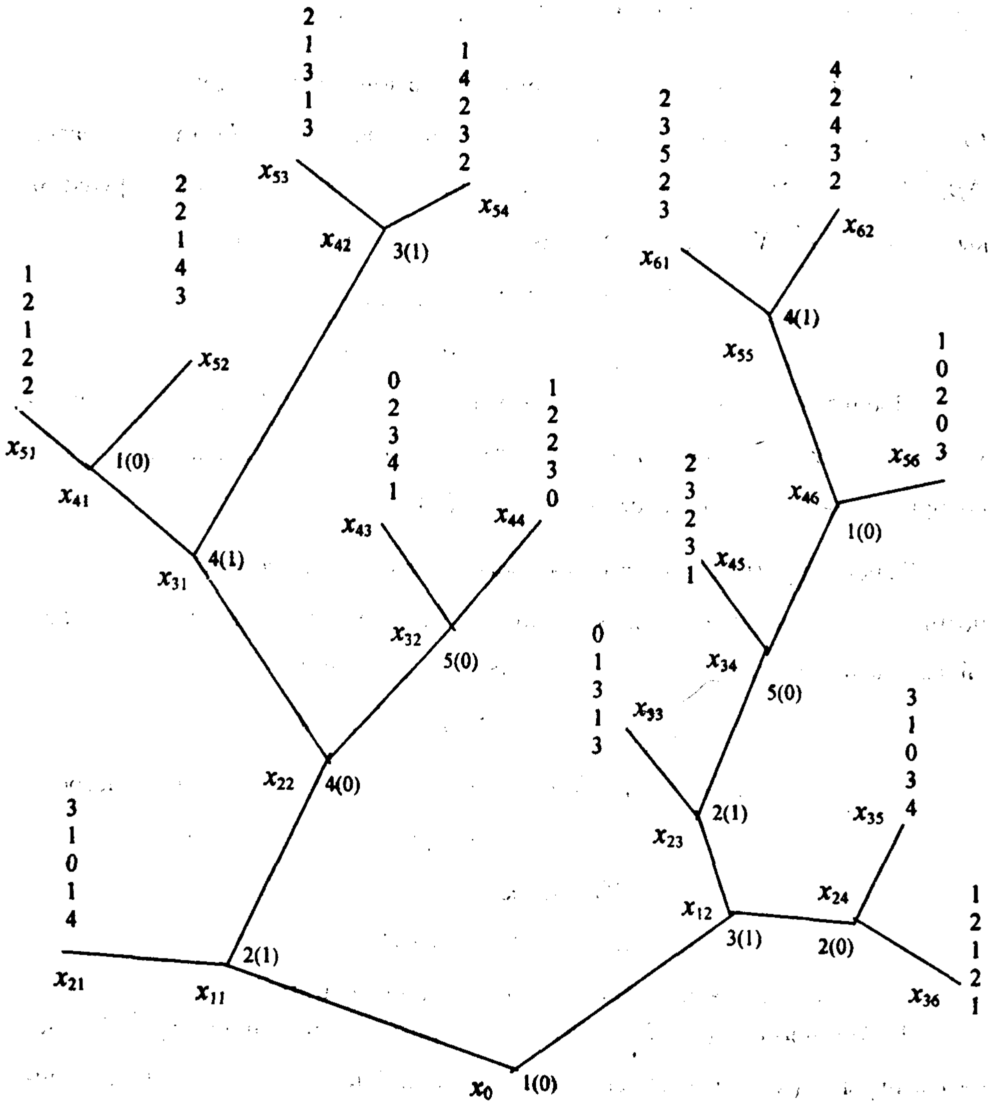
Дальнейшие шаги процедуры аналогичны шагам 1 и 2.

3. Значение игры $\Gamma_f(x_0)$. Рассмотрим позиционную игру Γ с деревом игры $K(x_0)$, изображенным на рисунке. Здесь $N=\{1;2;3;4;5\}$. Личные позиции игрока 1 – позиции x_0, x_{41} и x_{46}, игрока 2 – x_{11}, x_{23} и x_{24}, игрока 3 – x_{12} и x_{42}, игрока 4 – x_{22}, x_{31} и x_{55}, игрока 5 – x_{32} и x_{34}. Выигрыши записаны в окончательных позициях, причем в каждом столбце верхнее число и есть выигрыш игрока. Предположим, что кооперативная функция $f=(f_1,...,f_5)$ имеет следующую форму:

$$f_1(x_0)=f_1(x_{41})=f_1(x_{46})=0,\ f_2(x_{11})=1=f_2(x_{23}),\ f_2(x_{24})=0,$$

$$f_3(x_{12})=f_3(x_{42})=1,\ f_4(x_{22})=0,\ f_4(x_{31})=f_4(x_{55})=1,\ f_5(x_{32})=f_5(x_{34})=0.$$

Определим коалиции в некоторых позициях, где они могут возникать согласно кооперативной функции $f: S_f(x_{42})=\{2;\ 3;\ 4\}, S_f(x_{12})=\{3;\ 4\}$, $S_f(x_{41})=\{2;\ 4\}$. Коалиционные структуры можно найти и в остальных позициях.



Процедуру построения оптимального пути начнем с множества X_0, которое состоит из окончательных позиций x_{61}, x_{62}.

Первому этапу соответствует только $K(x_{55})$. В x_{55} делает ход кооперирующийся игрок 4. Выигрыши игроков из $S_f(x_{55})$ в x_{61} и x_{62} задаются в виде троек чисел $(10;\ 2;\ 3)$ и $(9;\ 4;\ 2)$ соответственно, где первый компонент есть выигрыш игрока $\{2;\ 3;\ 4\}$, второй – игрока 1, третий – игрока 5. Здесь $r^1(x_{55})=(2;\ 3;\ 5;\ 2;\ 3)^*$ (* означает транспонирование).

Ко второму этапу относятся поддеревья $K(x_{41})$, $K(x_{42})$ и $K(x_{46})$, где выигрыши будут $r^2(x_{41})=(2;\ 2;\ 1;\ 4;\ 3)^*$, $r^2(x_{42})=(1;\ 4;\ 2;\ 3;\ 2)^*$, $r^2(x_{46})=(2;\ 3;\ 5;\ 2;\ 3)^*$.

Продолжая игру, в предпоследнем этапе получим $r^5(x_{11})= =\left(1;\ \frac{18}{7};\ \frac{9}{7};\ \frac{36}{7};\ 2\right)^*$. В x_{12} из коалиции $\{2;\ 3;\ 4\}$ выходит игрок 2. Тогда необходимо рассмотреть вспомогательную игру $\Gamma(x_{23})$, т.к. $Y(x_{12})=\{x_{23}\}$. Здесь равновесной по Нэшу ситуации соответствует позиция x_{61}, $\sum_{i\in\{2;3;4\}} h_i(x_{61})=3+5+2=10$, коэффициенты коопераций равны $\alpha_2=\frac{3}{10}$, $\alpha_3=\frac{1}{2}$, $\alpha_4=\frac{1}{5}$. Имеем $V_f(x_{23},\{2;\ 3;\ 4\},\{1\},\{5\})=3+5+2=10$. Тогда суммарный выигрыш коалиции $\{2;\ 3;\ 4\}$ в x_{23} делится между игроками коалиции $S_f(x_{23})=\{2;\ 3;\ 4\}$ следующим образом: $Nh_2^f(x_{23})= =\alpha_2\cdot V_f=\frac{3}{10}\cdot 10=3$, $Nh_3^f(x_{23})=\frac{1}{2}\cdot 10=5$ и $Nh_4^f(x_{23})=\frac{1}{5}\cdot 10=2$. Таким образом, новый выигрыш в x_{23} будет

$$r^4(x_{23})=\left(r_1^4(x_{23}),\ \overline{r}_2^4(x_{23}),\ \overline{r}_3^4(x_{23}),\ \overline{r}_4^4(x_{23}),\ r_5^4(x_{23})\right)=(2;\ 3;\ 5;\ 2;\ 3).$$

В x_{12} индивидуальный игрок 3 выбирает позицию x_{23}, где $r^5(x_{12})= =(2;\ 3;\ 5;\ 2;\ 3)$. В корне дерева игры x_0 $Y(x_0)=\varnothing$, поэтому игроку 1 лучше выбрать выигрыш в x_{12}, где $r_1^5(x_0)=2$, а не в x_{11}, где $r_1^6(x_0)=1$. В итоге, в игре $\Gamma_f(x_0)$ оптимальным путем является $x(f)= =\{x_0,\ x_{12},\ x_{23},\ x_{34},\ x_{46},\ x_{55},\ x_{61}\}$, а значение игры равно $r(x_0)=(2;\ 3;\ 5;\ 2;\ 3)$.

Изменяя кооперативную функцию f, мы получим класс всех частично-кооперативных игр $\Gamma_f(x_0)$, которые могут быть определены на дереве $K(x_0)$. А это при прочих привилегиях дает еще и возможность игроку найти наилучшую для него кооперативную функцию f.

Кафедра теоретической механики

Поступила 17.05.2004,
после доработки – 04.02.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петросян Л.А., Аешин Д.А.** – Труды института математики и механики УрО РАН, 2000, т. 6, № 1, 2, с. 160–172.
2. **Ayoshin D., Tanaka T.** The core and the dominance core in multi-choice multistage games with coalitions in a matrix form. Submitted to the Proceedings of NACA98 (International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis), 1998.
3. **Chih-Ru Hsiao, Raghavan T.** – Games and Economic Behavior, 1993, v. 5, p. 240–256.
4. **Nash J.F.** – Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1950, v. 36, p. 48–49.

Օ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Ռ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԱԼ ՀԵՏԱԳԻԾԸ ՄԱՍՆԱԿԻ-ԿՈՈՊԵՐԱՏԻՎ ԽԱՂԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում քննարկվում է մասնակի-կոոպերացիա մի դիրքային խաղում: Այդպիսի խաղի համար ներկայացվում է խաղացողների օպտիմալ վարքի և խաղի արժեքը գտնելու եղանակ: Խաղի ընթացքում կոալիցիա կազմող խաղացողների միջև բաշխույթը որոշելիս դիտարկվում են օժանդակ խաղեր և դրանցում՝ ըստ Նեշի հավասարակշիռ վիճակներ կոալիցիայի առկայության դեպքում: Բերված է օրինակ:

O. S. MIKAELYAN, R. V. KHACHATRYAN

THE OPTIMAL TRAJECTORY IN PARTIAL-COOPERATIVE GAMES

Summary

In an extensive form game is considered partial-cooperation. The optimal behavior and the method of finding the value of the game is represented for that game. During the game discussing the auxiliary games for finding distribution between players consisting coalition, and equilibrium condition by Nash, when the coalition is available. There is an example.