

УДК 515.1

В. С. АТАБЕКЯН

О ПРОСТРАНСТВАХ С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЕДЕЛА

В работе изучаются пространства (X, A) с операцией предела, введенные И. Г. Хачатрян, с точки зрения нестандартных моделей. С помощью нестандартных расширений описываются полная система окрестностей пространства (X, A) , открытые и замкнутые множества, сходимость, предельные точки данного множества, а также отделимые пространства.

Пусть X – непустое множество, элементы которого будем называть точками. Каждой точке $x \in X$ сопоставим непустое семейство множеств V_x , содержащих x . Ясно, что V_x – центрированное семейство. Элементы $v \in V_x$ назовем *начальными окрестностями* точки x . Напоминаем, что последовательностью точек множества X называется любое отображение $\hat{s}: \mathbb{N} \rightarrow X$. Следующее определение впервые было введено в монографии [1].

Определение 1. Точка $x \in X$ называется пределом последовательности $\hat{s} \in X^{\mathbb{N}}$ по семейству начальных окрестностей V_x , если для любого $v \in V_x$

$$|\{n; n \in \mathbb{N} \wedge \hat{s}(n) \notin v\}| < \infty,$$

где $\hat{s}(n) \in X$ – значение отображения \hat{s} на $n \in \mathbb{N}$.

Как видно из определения, здесь не требуется, чтобы семейства окрестностей V_x задавали топологию на множестве X .

Если $x \in X$ – предел последовательности \hat{s} по семейству начальных окрестностей V_x , то будем писать: $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x$. Пусть $v \subset X$. Рассмотрим прообразы начальных окрестностей при отображении \hat{s} : $\hat{s}^{-1}(v) = \{n; n \in \mathbb{N} \wedge \hat{s}(n) \in v\}$. Очевидно, если $u \subset v$, то $\hat{s}^{-1}(u) \subset \hat{s}^{-1}(v)$ и $\mathbb{N} - \hat{s}^{-1}(u) \supset \mathbb{N} - \hat{s}^{-1}(v)$. Таким образом, $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x$ тогда и только тогда, когда $\forall v [v \in V_x \Rightarrow |\mathbb{N} - \hat{s}^{-1}(v)| < \infty]$.

Через $F(V_x)$ обозначим фильтр, порожденный семейством V_x [2]. Из определения фильтра немедленно следует

Лемма 1. $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x \Leftrightarrow \hat{s} \xrightarrow{F(V_x)} x$.

Если $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x$, то, очевидно, семейство $\{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v \in F(V_x)}$ является фильтром на множестве натуральных чисел \mathbb{N} . Если Φ_1 и Φ_2 – два фильтра, то запись $\Phi_1 < \Phi_2$ означает, что фильтр Φ_2 мажорирует фильтр Φ_1 . Через Φ обозначим фильтр Фреше, определенный на множестве натуральных чисел. Леммы 2–7 нетрудно доказать, если исходить из соответствующих определений.

Лемма 2. $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x \Leftrightarrow \{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v \in F(V_x)} < \Phi$.

Через $s(x, V_x)$ обозначим множество всех последовательностей, сходящихся к точке $x \in X$ по семейству окрестностей V_x :

$$s(x, V_x) = \{\hat{s}; \hat{s} \in X^{\mathbb{N}} \wedge \hat{s} \xrightarrow{V_x} x\}.$$

Для каждой точки x выберем семейство $U_x \subset 2^X$ таким образом, что

$$u \in U_x \Leftrightarrow \forall \hat{s} [\hat{s} \in s(x, V_x) \Rightarrow \hat{s}^{-1}(u) \in \Phi].$$

Из леммы 2 следуют:

Лемма 3. Семейство U_x является фильтром и $F(V_x) < U_x$.

Лемма 4. $\hat{s} \xrightarrow{V_x} x \Leftrightarrow \hat{s} \xrightarrow{U_x} x$.

Лемма 5. $\forall \hat{s} [\hat{s} \in s(x, V_x) \Rightarrow \{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v \in V_x} < \{\hat{s}^{-1}(u)\}_{u \in U_x} < \Phi]$.

Лемма 6. Если W_x такая система окрестностей точки $x \in X$, что

$$\forall \hat{s} [\hat{s} \in s(x, V_x) \Rightarrow \{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v \in V_x} < \{\hat{s}^{-1}(w)\}_{w \in W_x} < \Phi], \text{ то}$$

$$\forall \hat{s} [\hat{s} \in s(x, V_x) \Rightarrow \{\hat{s}^{-1}(v)\}_{v \in V_x} < \{\hat{s}^{-1}(w)\}_{w \in W_x} < \{\hat{s}^{-1}(u)\}_{u \in U_x}].$$

Определение 2 [1]. Для начальной системы окрестностей $\{V_x\}_{x \in X}$ семейство $\{U_x\}_{x \in X}$ называется *полной системой окрестностей* точки x , а любое $u \in U_x$ называется *окрестностью* точки x .

Рассмотрим отображение $\Lambda: X^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^X$, для которого $x \in \Lambda(\hat{s}) \Leftrightarrow \hat{s} \xrightarrow{V_x} x$.

Определение 3 [1]. Пара (X, Λ) называется *пространством с операцией предела*, порожденным начальной системой окрестностей $\{V_x\}_{x \in X}$.

Лемма 7. Если $s(x, V_x) \neq \emptyset$, то $x \in \Lambda(s(x, V_x))$.

Если $v \subset X$, то через P_v обозначим одноместный предикат, определяющий множество v , т.е. $P_v: X \rightarrow \{0, 1\}$ такое отображение, что

$$(x \in v \Rightarrow P_v(x) = 1) \wedge (x \notin v \Rightarrow P_v(x) = 0).$$

Пусть (X, Λ) – пространство с операцией предела, порожденное начальной системой окрестностей $\{V_x\}_{x \in X}$. Обозначим $F_x = \{P_v, v \in V_x\}$ и $F = \bigcup_{x \in X} F_x$.

Ясно, что пространство (X, Λ) однозначно определяет модель (X, F) и наоборот.

Теперь рассмотрим модель $(\mathbb{N} \cup X, S)$, где \mathbb{N} – множество натураль-

ных чисел, а S – множество всевозможных предикатов на $N \cup X$. Пусть (X_1, S_1) – нестандартная модель теории $Th(N \cup X, S)$ [3, 4]. Тогда $X_1 = N^* \cup X^*$, где N^* – нестандартная модель множества натуральных чисел. Можно считать, что $N \subset N^*$ и $X \subset X^*$, более того, когда X – бесконечное множество, то $X \neq X^*$. Если $v \in U_x$, то предикату P_v соответствует подмножество $v^* \subset X^*$, причем $v \subset v^*$.

Определение. Множество $O_x = \bigcap_{u \in U_x} u^*$ назовем *микрорекрестностью*

точки x .

Очевидно, $x \in O_x$. Если $y \in O_x$, то будем писать $y \approx x$.

Каждой последовательности $\hat{s}: N \rightarrow X$ соответствует отображение $\hat{s}^*: N^* \rightarrow X^*$.

Теорема 1. Пусть $v \subset X$ и $\hat{s}: N \rightarrow X$. Тогда формула

$$\exists m \forall n [n > m \Rightarrow \hat{s}(n) \in v]$$

истинна тогда и только тогда, когда для любого бесконечно большого натурального числа $\alpha \in N^* - N$ имеет место $\hat{s}^*(\alpha) \in v^*$.

Доказательство. Если существует такое натуральное число m_0 , что из $n > m_0$ следует $s(n) \in v$, то для любого бесконечно большого натурального числа α будет выполняться $\hat{s}^*(\alpha) \in v^*$, поскольку $\alpha > m_0$. Обратно, если предположить, что $\forall m \exists n [n > m \wedge \hat{s}(n) \notin v]$, то, взяв в качестве m бесконечно большое число, получим противоречие с условием $\hat{s}^*(\alpha) \in v^*$.

Следствие 1.1. $\hat{s} \xrightarrow{v_x} x$ тогда и только тогда, когда для любого бесконечно большого числа α выполняется $\hat{s}^*(\alpha) \in O_x$, т.е. $\hat{s}^*(\alpha) \approx x$.

Следствие 1.2. В пространстве (X, A) множество M секвенциально компактно (см. [1], определение 1.11) тогда и только тогда, когда для любой последовательности \hat{s} выполняется следующее условие:

$$\forall \alpha (\alpha \in (N^* - N) \Rightarrow \hat{s}^*(\alpha) \in M^*) \Rightarrow \exists x \exists \beta (x \in M \wedge \beta \in (N^* - N) \wedge \hat{s}^*(\beta) \in O_x).$$

Теорема 2. Пусть $x \in u \subset X$. Тогда $u \in U_x \Leftrightarrow O_x \subset u^*$.

Доказательство. Необходимость следует из определения множества O_x . Докажем достаточность. Предположим, что $\hat{s} \xrightarrow{U_x} x$. Согласно следствию 1.1, $\forall \alpha [\alpha \in (N^* - N) \Rightarrow \hat{s}^*(\alpha) \in O_x]$, а поскольку по условию теоремы $O_x \subset u^*$, то для любого бесконечно большого натурального числа $\alpha \in N^*$ имеет место $\hat{s}^*(\alpha) \in u^*$. Тогда, в силу теоремы 1, $\hat{s} \xrightarrow{U_x} x \Leftrightarrow \hat{s} \xrightarrow{U_x \cup \{u\}} x$. Но так как U_x – полная система окрестностей точки x , то $u \in U_x$, что и требовалось доказать.

Следствие 2.1 Подмножество $u \subset X$ является открытым множеством пространства (X, A) (см. [1], определение 1.4) тогда и только тогда, когда

$$\forall x (x \in u \Rightarrow O_x \subset u^*).$$

Доказательство. Необходимость немедленно следует из определения открытого множества, а достаточность – из теоремы 2.

Когда (X, \mathcal{A}) – топологическое пространство, из следствия 2.1 непосредственно вытекает теорема 1.3 (гл. 3 из [3]).

Следствие 2.2. Множество M замкнуто в пространстве (X, \mathcal{A}) тогда и только тогда, когда $\forall x[x \in X - M \Rightarrow O_x \subset X^* - M^*]$.

Следствие 2.3. Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда

$$\forall x[O_x \cap M^* \neq \emptyset \Rightarrow x \in M].$$

Теорема 3. В пространстве (X, \mathcal{A}) точка x является предельной точкой подмножества $M \subset X$ (см. [1], определение 1.7) тогда и только тогда, когда $\exists x_1[x_1 \in M^* \wedge x_1 \approx x \wedge x_1 \neq x]$.

Доказательство. Если x – предельная точка множества M , то существует последовательность $\hat{s}: \mathbb{N} \rightarrow M - \{x\}$, которая сходится к x , т.е.

$\hat{s} \xrightarrow{U_x} x$. Таким образом, с одной стороны, по теореме 1, для любого бесконечно большого натурального числа $\alpha \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ имеет место $\hat{s}^*(\alpha) \in M^* - \{x\}$, с другой стороны, согласно следствию 1.1, $\hat{s}^*(\alpha) \approx x$. Значит,

$$\hat{s}^*(\alpha) \in O_x \cap (M^* - \{x\}) = (O_x \cap M^*) - \{x\}.$$

В качестве x_1 можно взять $x_1 = \hat{s}^*(\alpha)$.

Чтобы доказать обратную импликацию, допустим, что x не является предельной точкой множества M . Тогда, если $\hat{s} \xrightarrow{U_x} x$, то

$$\exists m \forall n[n > m \Rightarrow \hat{s}(n) \in X - (M - \{x\})].$$

Значит, \hat{s} сходится к x и по семейству U_x , и по семейству $U_x \cup \{X - (M - \{x\})\}$. Так как \hat{s} – произвольная последовательность, сходящаяся к x , а U_x – полная система окрестностей точки x , то $u = X - (M - \{x\}) \in U_x$. Но тогда $u \cap (M - \{x\}) = \emptyset$ и, таким образом, $u^* \cap (M^* - \{x\}) = \emptyset$. В силу $O_x \subset u^*$ заключаем, что $O_x \cap (M^* - \{x\}) = \emptyset$, а это противоречит условию теоремы.

Следствие 3.1. Точка x – предельная точка для множества M тогда и только тогда, когда $O_x \cap (M^* - \{x\}) \neq \emptyset$.

Следствие 3.2. Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда M содержит все свои предельные точки.

Доказательство следует из следствий 2.2 и 3.1.

Пусть I – произвольное направленное множество (определение см. в [1–3]). Теорема А. Робинсона (см. [3], теорема 8.1, гл.1) утверждает, что для любого направленного множества I можно построить нестандартную модель (X_1, \mathcal{S}_1) теории $Th(I \cup X, \mathcal{S})$, для которой $X_1 = I^* \cup X^*$, а $I^* \supset I$ – такое направленное множество, в котором существует элемент $i^* \in I^*$ такой, что $\forall i(i \in I \Rightarrow i^* > i)$. Можно считать, что $X \subset X^*$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1 и следствия 1.1, получим следующий

результат (определение направленности см. в [1–3, 5]).

Теорема 4. В пространстве (X, \mathcal{A}) направленность $r: I \rightarrow X$ сходится к точке x (см. [1], определение 1.22) тогда и только тогда, когда для любого $i^* \in I^*$, удовлетворяющего условию $\forall i (i \in I \Rightarrow i^* > i)$, выполняется $r^*(i^*) \in O_x$, т.е. $r^*(i^*) \approx x$.

В заключение докажем следующую теорему.

Теорема 5. Пространство (X, \mathcal{A}) отделимо (см. [1], определение 1.13) тогда и только тогда, когда существует такое направленное множество I и такая нестандартная модель (X_1, S_1) теории $Th(I \cup X, S)$, в которой истинна формула

$$\forall x \forall y ((x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y) \Rightarrow O_x \cap O_y = \emptyset).$$

Доказательство. Пусть (X, \mathcal{A}) – отделимое пространство и $x, y \in X$, где $x \neq y$. По определению отделимого пространства, существуют $u \in U_x$ и $v \in U_y$, такие, что $u \cap v = \emptyset$. Тогда $u^* \cap v^* = \emptyset$. Так как $O_x \subset u^*$ и $O_y \subset v^*$, то $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Обратно, пусть (X, \mathcal{A}) – не отделимое пространство. Тогда существуют такие различные точки x и y в X , что любая окрестность $u \in U_x$ точки x пересекается с любой окрестностью $v \in U_y$ точки y . Множество всевозможных пар (u, v) , где $u \in U_x$ и $v \in U_y$, является направленным множеством относительно порядка $(u, v) < (u_1, v_1) \Leftrightarrow (u \subset u_1 \wedge v \subset v_1)$. По предположению, каждое пересечение $u \cap v$ не пусто, значит, из каждого пересечения $u \cap v$ можно выбрать по точке $z_{u \cap v}$. Тогда направленность $r: I \rightarrow X$, где $I = U_x \times U_y$ и $r((u, v)) = z_{u \cap v}$, в пространстве (X, \mathcal{A}) сходится к точке x , и к точке y . Согласно лемме 8, существует $i^* \in I^*$ такое, что $r^*(i^*) \in O_x$ и $r^*(i^*) \in O_y$, а это противоречит условию $O_x \cap O_y = \emptyset$. Теорема доказана.

Следствие 4.1 [3, 5]. Топологическое пространство является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда никакая направленность в этом пространстве не сходится к двум различным точкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачатрян И.Г. Пространства с операцией предела. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1999.
2. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М.: Высш. школа, 1979.
3. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.
4. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука, 1967.
5. Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.

ՄԱՀՄԱՆԻ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅԱՄԲ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում Ի. Գ. Խաչատրյանի կողմից ներմուծված (X, A) սահմանի գործողությանը տարածություններն ուսումնասիրվում են ոչ ստանդարտ մոդելների տեսանկյունից: Ոչ ստանդարտ ընդլայնումների միջոցով նկարագրվում են (X, A) տարածության շրջակայքերի լրիվ համակարգը, նույն տարածության բաց և փակ բազմությունները, զուգամիտությունը, տվյալ բազմության սահմանային կետերը, ինչպես նաև անջատելի տարածությունները:

V. S. ATABEKIAN

SPACES WITH LIMIT OPERATION

Summary

In this work the space (X, A) with limit operation (constructed by I. G. Kha-chatryan) is studied with the help of non-standard models. With the help of non-standard extensions are described the complete systems of neighbourhoods of (X, A) , the open and closed sets, the convergence, the limit points of the set, the spaces as well as separation spaces.