ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2005 Естественные науки

Ինֆորմատիկա

УДК 510.64

Ս. Մ. ՍԱՅԱԴՅԱՆ

ԻՆՏՈՒԻՑԻՈՆԻՍՏԱԿԱՆ ԱՍՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒՄ

Գրականության մեջ հայտնի են ասույթային դասական հաշվի տարբեր համակարգերի բարդատման հարցերին նվիրված բազմաթիվ հետազոտություններ [1, 2], սակայն ինտուիցիոնիստական կամ մինիմալ համակարգերում նմանատիպ աշխատանքները սակավաթիվ են:

Սույն հոդվածում ապացուցվում է, որ. 1) բազմանդամորեն համարժեք են ինտուիցիոնիստական ասույթային հաշվի 3 համակարգեր՝ Հիլբերտյան տիպի, սեկվենցիալ (հատույթի կանոնով) և բնական (Natural), 2) նշված 3 համակարգերից յուրաքանչյուրը ունի էքսպոնենցիալ արագացում ինտուիցիոնիստական ռեզոլյուցիայի համակարգի նկատմամբ:

§ 1. Հիմնական գաղափարներ: Մենք օգտվելու ենք արտածումների բարդության տեսության հանրահայտ գաղափարներից [1–4]:

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ արտածման <u>t-բարդություն</u> կանվանենք նրա տողերի (բանաձևերի, սեկվենցիաների) քանակը՝ m :
- φ բանաձևում (սեկվենցիայում) մասնակցող սիմվոլների քանակը նշանակենք $|\varphi|$-ով:
- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ արտածման <u>l-բարդություն</u> կանվանենք նրա մեջ մասնակցող բոլոր սիմվոլների քանակը՝ $\sum_{i=1\ldots m}|\varphi_i|$:
- φ բանաձևի (սեկվենցիայի) ոչ ավելի քան n t-բարդությամբ (l-բարդությամբ) արտածման փաստը Φ համակարգում նշանակենք

$$\left|\frac{t<=n}{\Phi}\varphi\right. \quad \left(\left|\frac{l<=n}{\Phi}\varphi\right.\right):$$

- Հետևելով Կուկին [1]՝ ներմուծենք բազմանդամային հանգեցման և համարժեքության գաղափարները:
- Դիցուք Φ_1-ը և Φ_2-ը ֆորմալ համակարգեր են: Կասենք, որ Φ_1-ը բազմանդամորեն հանգեցվում է Φ_2 համակարգին (կնշանակենք $\Phi_1 \prec_1 \Phi_2$), եթե գոյություն ունի այնպիսի $p()$ բազմանդամ, որ ցանկացած φ

բանաձևի (սեկվենցիայի) համար երբ $\left|\frac{l<=n}{\Phi_1}\right.\varphi$, ապա $\left|\frac{l<=p(n)}{\Phi_2}\right.\varphi'$: φ'-ը φ-ին համապատասխանող օբյեկտն է (բանաձևը, սեկվենցիան) Φ_2-ում:

• Φ_1 և Φ_2 ֆորմալ համակարգերը կոչվում են <u>բազմանդամորեն համարժեք</u> $(\Phi_1 \sim_1 \Phi_2)$, եթե $\Phi_1 \prec_1 \Phi_2$ և $\Phi_2 \prec_1 \Phi_1$:

• Նույնատիպ եղանակով սահմանվում է համարժեքությունը ըստ t-բարդության և նշանակվում է համապատասխանաբար $\Phi_1 \sim_t \Phi_2$:

§ 2. Ինտուիցիոնիստական ռեզոլյուցիայի և հիլբերտյան տիպի համակարգերի համեմատում: Դասական ռեզոլյուցիայի համակարգի նկատմամբ Ֆրեգեի համակարգերի էքսպոնենցիալ արագացման փաստը արտածումների բարդության տեսության ուշագրավ արդյունքներից է [1, 2]:

Սույն հոդվածում հետազոտվում է ինտուիցիոնիստական հաշվի համապատասխան համակարգերի հարաբերությունը և ապացուցված է նույնատիպ արագացման առուգությունը:

1. Հետևելով [2–4]-ին, սահմանենք HC (հիլբերտյան դասական), HJ (հիլբերտյան ինտուիցիոնիստական), RC (ռեզոլյուցիայի դասական) և RJ (ռեզոլյուցիայի ինտուիցիոնիստական) համակարգերը: Պետք է նշել, որ HC-ն Ֆրեգեի համակարգերից մեկն է:

HC (հիլբերտյան դասական) համակարգի աքսիոմների սխեմաներն են՝

1a. $A \supset (B \supset A)$,

1b. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$,

2. $A \supset (B \supset A \& B)$,

3a. $A \& B \supset A$,

3b. $A \& B \supset B$,

4a. $A \supset A \vee B$,

4b. $B \supset A \vee B$,

5. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$,

6. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$,

7. $\neg\neg A \supset A$:

Արտածման կանոնն է $A, A \supset B \vdash B$:

HJ (հիլբերտյան ինտուիցիոնիստական) համակարգը ստացվում է HC համակարգից՝ նրանում $\neg\neg A \supset A$ աքսիոմի (7) սխեման փոխարինելով $\neg A \supset (A \supset B)$-ով (7'): HC և HJ համակարգերի «արդյունավետությունների» հարաբերությունը փաստում է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 1. Ցանկացած φ նույնաբանության համար.

1) եթե $\left|\frac{t<=n}{HC}\right.\varphi$, ապա $\left|\frac{t<=cn}{HJ}\right.\neg\neg\varphi$, որտեղ c-ն որոշակի հաստատուն է;

2) եթե $\left|\frac{l<=n}{HC}\right.\varphi$, ապա $\left|\frac{l<=p(n)}{HJ}\right.\neg\neg\varphi$, որտեղ $p()$-ն որոշակի բազմանդամ է:

Ապացույցը ստացվում է [3]-ում բերված թեորեմ 59-ի հիման վրա: Իրոք, եթե $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$-ը φ-ի արտածումն է HC-ում, ապա, կառուցելով $\neg\neg\varphi_1, \neg\neg\varphi_2, \ldots, \neg\neg\varphi_m$ հաջորդականությունը և յուրաքանչյուր բանաձևի արտածումից առաջ կատարելով համապատասխան լրացումները, ստանում ենք լեմմա 1-ի պահանջներին բավարարող արտածումը HJ-ում:

RC (դասական ռեզոլյուցիայի) համակարգը նպատակաուղղված է կոնյունկտիվ նորմալ ձևով (կ.ն.ձ.) ներկայացված բանաձևերի հակասականության ստուգմանը: Աքսիոմները նախապես չեն ֆիքսվում: Որպես այդպիսիք հանդես են գալիս կ.ն.ձ.-ի դիզյունկտները:

Արտածման ռեզոլյուցիայի կանոնը տրվում է հետևյալ եղանակով՝ $\dfrac{A \vee p \text{ և } B \vee \rceil p}{A \vee B}$, որտեղ A-ն և B-ն դիզյունկտներ են, իսկ p-ն տրամաբանական փոփոխական: Նպատակն է՝ դատարկ դիզյունկտի (Λ) արտածումը:

Նշենք, որ φ բանաձևի ժխտումից բնականոն եղանակով նրա կ.ն.ձ.-ին անցնելիս կարող ենք նկատել բանաձևի երկարության էքսպոնենցիալ աճ: Ցեյտինի [5] կողմից նկարագրվել է մեկ այլ ալգորիթմ՝ համաձայն որի, վերագրելով ցանկացած φ բանաձևի յուրաքանչյուր ենթաբանաձևին որևէ փոփոխական, կարելի է կառուցել է $\bar{\varphi}$-կ.ն.ձ., որի երկարությունը ոչ ավելի, քան 6 անգամ է մեծ φ-ի երկարությունից և որը հակասական է այն և միայն այն դեպքում, երբ φ-ն նույնաբանություն է:

RJ (ինտուիցիոնիստական ռեզոլյուցիայի) համակարգի ցանկացած p, q, r, s տրամաբանական փոփոխականների, սխալ $(\perp)$ հաստատունի և Γ, Σ, Π բանաձևերի բազմությունների համար աքսիոմներն են՝ $p \to p$; $\perp \to p$; կանոնները՝

$$(\supset^-)\ \frac{(p \supset q^*) \to r,\ \Sigma p^0 \to q^{**}}{\Sigma \to r};$$

$$(\vee^-)\ \frac{p \to q \vee r;\ \Gamma \to p,\ \Sigma q \to s^*,\ \Pi r \to s^{**}}{\Gamma\Sigma\Pi \to s};$$

$$\frac{pq \to r^*;\ \Gamma \to p;\ \Sigma \to q}{\Gamma\Sigma \to r^*}\ (c)\ \frac{p \to q;\ \Gamma \to p}{\Gamma \to q};\quad (\perp)\ \frac{\to \perp}{\to p},$$

որտեղ s^*-ը կամ s է, կամ՝ $\perp$, իսկ p^0-ն կամ p է, կամ՝ դատարկ, ընդ որում $(\supset^-)$ կանոնում եթե $q^{**} = \perp$, ապա $p^* = p$:

RJ և RC համակարգերի «արդյունավետությունների» հարաբերակցությունը հաստատում է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 2. Դիցուք φ-ն նույնաբանություն է, $\bar{\varphi}$-ը φ-ին համապատասխանեցված կոնյունկտիվ նորմալ ձևն է վերոհիշյալ (Ցեյտինի) մեթոդով, ընդ որում s-ը հենց φ-ին վերագրված փոփոխականն է: Եթե $\left| \frac{t <= n}{RJ} \to s \right.$ $\left(\left| \frac{l <= n}{RJ} \to s \right)\right.$, ապա RC-ում $\bar{\varphi}$-ից արտածվում է դատարկ դիզյունկտը ոչ ավելի, քան n+1 t-բարդությամբ (ոչ ավելի, քան cn l-բարդությամբ որոշակի հաստատուն c-ի համար):

Ապացույցը հիմնվում է այն փաստի վրա, որ RJ-ի յուրաքանչյուր կանոն հանդիսանում է դասական ռեզոլյուցիայի կանոնի ոչ ավելի, քան 3 անգամ կիրառման արդյունքը:

Դասական տրամաբանության համակարգերի համեմատմանը միտված աշխատություններում կարևոր դեր է կատարում «Pigeonhole principle» կոչվող հետևյալ PHP_n բանաձևը՝ $\underset{0\le i\le n}{\&}\ \underset{0\le j<n}{V} P_{ij} \supset \underset{0\le i<k\le n}{V}\ \underset{0\le j<n}{V}\left(P_{ij} \& P_{kj}\right)$:

Թեորեմ 1:

1. Գոյություն ունի $p()$ բազմանդամ այնպիսին, որ $\left|\frac{l<=p(n)}{HJ}\right. \urcorner\urcorner PHP_n$;

2. Որոշակի c հաստատունի համար $\overline{\urcorner\urcorner PHP_n}$-ին համապատասխանող սեկվենցիաներից RJ-ում $\rightarrow s$-ի (s-ը PHP_n-ին վերագրված փոփոխականն է) արտածումը պահանջում է առնվազն $c2^n$ l-բարդություն:

Ապացույցը հետևում է դասական տրամաբանության համապատասխան համակարգերի համար ստացված նույնատիպ արդյունքից [1, 2], լեմմա1 և լեմմա 2-ի պնդումներից:

§ 3. Ինտուիցիոնիստական ասույթային հաշվի սեկվենցիալ, հիլբերտյան տիպի և բնական (Natural) համակարգերի համարժեքությունը:

SJ (հատույթի կանոնով սեկվենցիալ ինտուիցիոնիստական [3]) համակարգի աքսիոմն է $C\rightarrow C$:

Արտածման կանոններն են.

(1) $\dfrac{A,\Gamma\rightarrow B}{\Gamma\rightarrow A\supset B}$,

(2) $\dfrac{\Delta\rightarrow A \text{ և } B,\Gamma\rightarrow\Theta}{A\supset B,\Delta,\Gamma\rightarrow\Theta}$,

(3) $\dfrac{\Gamma\rightarrow A \text{ և } \Gamma\rightarrow B}{\Gamma\rightarrow A\,\&\,B}$,

(4) $\dfrac{A,\Gamma\rightarrow\Theta \text{ կամ } B,\Gamma\rightarrow\Theta}{A\,\&\,B,\Gamma\rightarrow\Theta}$,

(5) $\dfrac{\Gamma\rightarrow A \text{ կամ } \Gamma\rightarrow B}{\Gamma\rightarrow AVB}$,

(6) $\dfrac{A,\Gamma\rightarrow\Theta \text{ կամ } B,\Gamma\rightarrow\Theta}{AVB,\Gamma\rightarrow\Theta}$,

(7) $\dfrac{A,\Gamma\rightarrow}{\Gamma\rightarrow\urcorner A}$,

(8) $\dfrac{\Gamma\rightarrow A}{\urcorner A,\Gamma\rightarrow\Theta}$,

(9) $\dfrac{\Gamma\rightarrow}{\Gamma\rightarrow C}$,

(10) $\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta}{\Gamma'\rightarrow\Theta}$,

(11) $\dfrac{\Delta\rightarrow C \text{ և } C,\Gamma\rightarrow\Theta}{\Delta,\Gamma\rightarrow\Theta}$,

որտեղ $\Gamma\subseteq\Gamma'$: A, B, C-ն բանաձևեր են, Δ-ն և Γ-ն բանաձևերի բազմություններ են, իսկ Θ-ն կամ դատարկ է, կամ կազմված է մեկ բանաձևից:

NJ (բնական ինտուիցիոնիստական) համակարգ [4]:

Աքսիոմ՝ $A \to A$, արտածման կանոններն են.

$$(\&^+)\quad \frac{\Gamma \to A \text{ և } \Sigma \to B}{\Gamma\Sigma \to A \,\&\, B}, \qquad (\&^-)\quad \frac{\Gamma \to A \,\&\, B}{\Gamma \to A \text{ և } \Gamma \to B},$$

$$(V^+)\quad \frac{\Gamma \to A \text{ կամ } \Gamma \to B}{\Gamma \to AVB}, \qquad (V^-)\quad \frac{\Gamma \to AVB, \Sigma A \to C \text{ և } \Pi B \to C}{\Gamma\Sigma\Pi \to C},$$

$$(\supset^+)\quad \frac{\Gamma, A^o \to B}{\Gamma \to A \supset B}, \qquad (\supset^-)\quad \frac{\Gamma \to A \supset B \text{ և } \Sigma \to A}{\Gamma\Sigma \to B},$$

$$(\bot)\quad \frac{\Gamma \to \bot}{\Gamma \to A},$$

որտեղ A, B, C-ն բանաձևեր են, Γ, Σ, Π -ն բանաձևերի բազմություններ են, A^o-ն կամ A է, կամ դատարկ է:

Ինչպես և դասական տրամաբանության նմանատիպ համակարգերի համար, բնական ձևով մոդելավորելով մեկ համակարգում տրված արտածումը մյուսում, դժվար չէ ապացուցել

Թեորեմ 2:

1) $SJ \sim_t HJ \sim_t NJ$; 2) $SJ \sim_l HJ \sim_l NJ$:

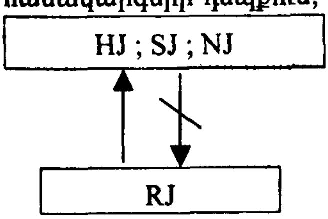
Օգտվելով [3]-ում բերված RJ համակարգի արտածումների NJ համակարգում մոդելավորման ալգորիթմից՝ դժվար չէ ապացուցել հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3:

1) $RJ \prec_t NJ$; 2) $RJ \prec_l NJ$:

Իրոք, արտածելով NJ-ում RJ-ի յուրաքանչյուր կիրառված կանոն և նրանում ամեն մի նոր ներմուծված փոփոխականը փոխարինելով իրեն համապատասխանող ենթաբանաձևով, կստանանք պահանջվող արտածումը NJ-ում, որի բնութագրիչների գնահատումը ապացուցում է թեորեմ 3-ի ստուգությունը:

Եզրակացություն: Այսպիսով, ինչպես և դասական ասույթային հաշվի համակարգերի դեպքում, որպես 1, 2, և 3 թեորեմների պնդումների հետևանք



ապացուցվեց հետևյալ ստորակարգման ստուգությունը ինտուիցիոնիստական հաշվի համապատասխան համակարգերի համար: Միևնույն վանդակում նշված են իրար բազմանդամորեն համարժեք համակարգերը: Մեկ վանդակից դեպի մյուսը տանող սլաքը փաստում է, որ առաջինում եղած համակարգը բազմանդամորեն է հանգեցվում մյուս վանդակում նշված յուրաքանչյուր համակարգին: Գծիկով սլաքը փաստում է հանգեցման բացակայությունը, այսինքն, առաջինում նշված յուրաքանչյուր համակարգ ունի էքսպոնենցիալ արագացում երկրորդում նշված համակարգի նկատմամբ:

Ինֆորմատիկայի հանրահաշվա-տրամաբանական մեթոդների ամբիոն

Ստացվել է 16.11.2004

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Samuel R. Buss** – Journal of Symbolic Logic, 1987, v. 52, issue 4, p. 916–927.
2. **Samuel R. Buss, Toniann Pitassi.** Resolution and the Weak Pigeonhole Principle, Paper from Annual Conference of the European Association for Computer Science Logic, August 23–29, 1997.
3. **Клини С.К.** Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
4. **Минц Г.Е.** – Семиотика и информатика, 1985, вып. 25, с. 120–125.
5. **Цейтин Г.С.** – Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 1968, № 8, с. 234–259.

С. М. САЯДЯН

СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ

Резюме

Построен некий фрагмент иерархии по сложности выводов одних и тех же формул для ряда традиционных систем доказательств интуиционистской логики: системы резолюций, а также натуральных, гильбертовских и секвенциальных. Полученные соотношения идентичны соотношениям между одноименными системами классической логики.

S. M. SAYADYAN

COMPARISON OF SEVERAL PROOF SYSTEMS OF INTUITIONISTIC PROPOSITIONAL LOGIC

Summary

A fragment of hierarchy of the proof systems for intuitionistic propositional logic under the p-simulation relation is constructed. These systems are resolution system, natural, Hilbert-style system and sequence system. The obtained hierarchy is the same as the hierarchy for analogous systems of classical logic.