ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2005 Естественные науки

Математика

УДК 517.948.25

Т. Н. АРУТЮНЯН, Г. Г. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В работе доказываются счетность собственных значений и полнота системы собственных функций для одной краевой задачи в частных производных.

§1. Некоторые предварительные понятия. Пусть $H_r = \left(L^2\left[0,\ell_r\right],C^2\right)$, $r=1,2$, – гильбертовы пространства двухкомпонентных вектор-функций $f^r(x_r)=(f_1^r(x_r),\ f_2^r(x_r))$, $x_r\in(0,\ell_r)$, со скалярным произведением

$$\left(f^r,g^r\right)_r = \int_0^{\ell_r}\left(f_1^r(x_r)\overline{g_1^r(x_r)}+f_2^r(x_r)\overline{g_2^r(x_r)}\right)dx_r\,,\quad r=1,2. \tag{1.1}$$

Обозначим через H тензорное произведение пространств $H_1\otimes H_2$. Элементами H являются всевозможные тензорные произведения произвольных двух вектор-функций $f^1(x_1)=(f_1^1(x_1),f_2^1(x_1))\in H_1$ и $f^2(x_2)=(f_1^2(x_2),f_2^2(x_2))\in H_2$, определяемые в H как четырехмерные вектор-функции

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=f^1(x_1)\otimes f^2(x_2)=\\&=(f_1^1(x_1)f_1^2(x_2),\ f_1^1(x_1)f_2^2(x_2),\ f_2^1(x_1)f_1^2(x_2),\ f_2^1(x_1)f_2^2(x_2))=\\&=\left(f_1\left(x_1,x_2\right),f_2\left(x_1,x_2\right),f_3\left(x_1,x_2\right),f_4\left(x_1,x_2\right)\right).\end{aligned}$$

Скалярное произведение в H определяется по формуле

$$\left(f,g\right)_H=\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\sum_{i=1}^{4}f_i(x_1,\ x_2)\overline{g_i(x_1,\ x_2)}dx_1dx_2\ .$$

Предполагается, что H пополнено в его собственном скалярном произведении. Известно, что при этом H будет гильбертовым пространством, изоморфным (см., напр., [1], с. 67) пространству $L^2(I;C^4)$, где $I=[0,\ \ell_1]\times[0,\ \ell_2]$.

Определение 1. Система функций $y_k(x_1,\ x_2)$ вида $y_k(x_1,\ x_2)= = y_k(x_1)\otimes y_k(x_2)$ называется полной в H, если для любого $f\in H$ из условия $(f,\ y_k)_H=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$ следует, что $f(x)\equiv 0$ п.в.

§2. Формулировка задачи и основных результатов. Рассматривается следующая краевая задача в прямоугольнике $I=[0,\ \ell_1]\times[0,\ \ell_2]$:

$$\begin{cases} A(x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}-B(x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+C(x_1,\ x_2)u=\mu K(x_1,\ x_2)u(x), \\ u(\ell_1,\ x_2)=u(0,\ x_2), \qquad x_2\in[0,\ \ell_2], \\ u(x_1,\ \ell_2)=u(x_1,\ 0), \qquad x_1\in[0,\ \ell_1], \end{cases} \tag{2.1}$$

где $A,\ B,\ C,\ K\in M^{4,4}$ – непрерывные матрицы порядка 4×4, $u(x)=$ $=u(x_1,x_2)\in M^{4,1}$ – неизвестная вектор-функция, μ – комплексный параметр.

Определение 2. Значение параметра μ, при котором краевая задача (2.1) имеет нетривиальное решение $u(x_1,\ x_2,\ \mu)$ $(\not\equiv 0)$, называется собственным значением, а соответствующее ему решение u называется собственной функцией.

Обозначим $S_0=-S\otimes S$, где $S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Имеет место

Теорема. Если

$$A(x_1)=A_1(x_1)\otimes E,\ B(x_2)=E\otimes A_2(x_2),\ C(x_1,\ x_2)=C_1(x_1)\otimes E-E\otimes C_2(x_2),$$
$$K(x)=K_1(x_1)\otimes E-E\otimes K_2(x_2), \tag{2.2}$$

где $A_r,\ C_r,\ K_r$ $(r=1,2)$ – вещественные непрерывные на $[0,\ \ell_r]$ матрицы порядка 2×2, E – единичная матрица, причем матрицы A_r вида $\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}$, матрицы $C_r,\ K_r$ вида $\begin{pmatrix}m & n\\ -n & m\end{pmatrix}$ и оператор $\Delta_0=S_0(AB)^{-1}K$ удовлетворяет условию $(\Delta_0 h,\ h)_H\ge\gamma\|h\|^2$, $\gamma>0$, для любого $h\in H$, то краевая задача (2.1) имеет счетное число собственных значений, которые все действительны, а соответствующие собственные функции можно пронормировать так, чтобы они образовывали Δ_0-ортонормированную и полную в $L^2(I)$ систему.

§3. Доказательство теоремы. Предположим, что $y_r(x_r)=$ $=(y_r^1(x_r),y_r^2(x_r))$, $z_r(x_r)=(z_r^1(x_r),\ z_r^2(x_r))$, $r=1,2$, – C^2-значные вектор-функции, непрерывные на отрезке $[0,\ell_r]$, $r=1,\ 2$. Имеет место

Лемма1. Из тождества

$$z_1(x_1)\otimes y_2(x_2)=y_1(x_1)\otimes z_2(x_2),\ (x_1,\ x_2)\in[0,\ \ell_1]\times[0,\ \ell_2], \tag{3.1}$$

следует, что существует такое λ, что

$$z_i(x_i)=\lambda y_i(x_i),\quad i=1,2. \tag{3.2}$$

Доказательство. Воспользовавшись определением тензорного произведения для вектор-функций, запишем равенство (3.1) в виде

$$\left(z_1^1(x_1)y_2^1(x_2),\ z_1^1(x_1)y_2^2(x_2),\ z_1^2(x_1)y_2^1(x_2),\ z_1^2(x_1)y_2^2(x_2)\ \right)=$$

$$=\left(y_1^1(x_1)z_2^1(x_2),\ y_1^1(x_1)z_2^2(x_2),\ y_1^2(x_1)z_2^1(x_2),\ y_1^2(x_1)z_2^2(x_2)\right).$$

Отсюда следуют тождества

$$z_1^1(x_1)y_2^1(x_2)=y_1^1(x_1)z_2^1(x_2),$$
$$z_1^1(x_1)y_2^2(x_2)=y_1^1(x_1)z_2^2(x_2),$$
$$z_1^2(x_1)y_2^1(x_2)=y_1^2(x_1)z_2^1(x_2),$$
$$z_1^2(x_1)y_2^2(x_2)=y_1^2(x_1)z_2^2(x_2),$$

или, предположив, что $y_i^j(x_i)\neq 0,\quad i,j=1,\ 2$, получим

$$\frac{z_1^1(x_1)}{y_1^1(x_1)}=\frac{z_2^1(x_2)}{y_2^1(x_2)},\quad \frac{z_1^1(x_1)}{y_1^1(x_1)}=\frac{z_2^2(x_2)}{y_2^2(x_2)},\quad \frac{z_1^2(x_1)}{y_1^2(x_1)}=\frac{z_2^1(x_2)}{y_2^1(x_2)},\quad \frac{z_1^2(x_1)}{y_1^2(x_1)}=\frac{z_2^2(x_2)}{y_2^2(x_2)}.$$

Отсюда найдем, что

$$\frac{z_1^1(x_1)}{y_1^1(x_1)}=\frac{z_1^2(x_1)}{y_1^2(x_1)}=\frac{z_2^1(x_2)}{y_2^1(x_2)}=\frac{z_2^2(x_2)}{y_2^2(x_2)}. \tag{3.3}$$

Зафиксировав какое-то значение x_1 из отрезка $[0,\ \ell_1]$, получим, что для всех $x_2\in[0,\ \ell_2]$ имеют место равенства

$$\frac{z_1^1(x_1)}{y_1^1(x_1)}=\frac{z_1^2(x_1)}{y_1^2(x_1)}=\frac{z_2^1(x_2)}{y_2^1(x_2)}=\frac{z_2^2(x_2)}{y_2^2(x_2)}=const=\lambda\,.$$

Тогда из соотношения (3.3) будет следовать, что

$$\frac{z_1^1(x_1)}{y_1^1(x_1)}=\frac{z_1^2(x_1)}{y_1^2(x_1)}=\frac{z_2^1(x_2)}{y_2^1(x_2)}=\frac{z_2^2(x_2)}{y_2^2(x_2)}=\lambda$$

для любых $x_r\in\left[0,\ell_r\right]$ $(r=1,2)$, откуда будем иметь

$$z_i(x_i)=\lambda y_i(x_i),\qquad i=1,2\,. \tag{3.4}$$

Нетрудно проверить, что соотношения (3.2) имеют место и в случае равенства нулю одной из компонент $y_i(x_i)$ или $z_i(x_i)$, $i=1,2.$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Граничную задачу (2.1) при условиях (2.2) можно свести к следующей двупараметрической задаче Дирака:

$$\begin{cases} S\dfrac{dy_r(x_r)}{dx_r}+G_r(x_r)y_r(x_r)=\sum\limits_{s=1}^{2}\lambda_s A_{rs}(x_r)y_r(x_r), & r=1,2, \quad (3.5)\\ y_r(\ell_r)=y_r(0), \quad r=1,2, & \quad (3.6)\end{cases}$$

где

$$G_1=SA_1^{-1}C_1,\ G_2=SA_2^{-1}C_2,\ A_{11}=SA_1^{-1},\ A_{12}=SA_1^{-1}K_1,\ A_{21}=SA_2^{-1},\ A_{22}=SA_2^{-1}K_2\,. \tag{3.7}$$

Верно и обратное.

Доказательство. Будем искать решения задачи (2.1) в виде $y(x_1,\ x_2)=y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)$, где $y_r(x_r)$ – двухкомпонентная вектор-функция, удовлетворяющая условиям

1. $y^r(x_r)\in AC[0,\ \ell_r]$.

2. $D_r y^r \equiv S\dfrac{dy^r}{dx_r}+G_r(x_r)y^r \in L^2[0,\ \ell_r]$.

Подставив значение y в систему (1.1) и учитывая свойства тензорных произведений (см., напр., [2]), найдем

$$(A_1(x_1)\otimes E)\left(\frac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1}\otimes y_2(x_2)\right)-(E\otimes A_2(x_2))\left(y_1(x_1)\otimes\frac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2}\right)+$$

$$+(C_1(x_1)\otimes E-E\otimes C_2(x_2))y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)=\mu(K_1(x_1)\otimes E-E\otimes K_2(x_2))y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)$$

или

$$A_1(x_1)\frac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1}\otimes y_2(x_1)-y_1(x_1)\otimes A_2(x_2)\frac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2}+C_1(x_1)y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)-$$

$$-y_1(x_1)\otimes C_2(x_2)y_2(x_2)=\mu K_1(x_1)y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)-\mu y_1(x_1)\otimes K_2(x_2)y_2(x_2).$$

Отсюда найдем

$$\left(A_1(x_1)\frac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1}+C_1(x_1)y_1(x_1)-\mu K_1(x_1)y_1(x_1)\right)\otimes y_2(x_1)=$$

$$=y_1(x_1)\otimes\left(A_2(x_2)\frac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2}+C_2(x_2)y_2(x_2)-\mu K_2(x_2)y_2(x_2)\right).$$

Из полученных соотношений, согласно лемме 1, будет следовать, что существует такое число λ, что

$$\begin{cases} A_1(x_1)\dfrac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1}+C_1(x_1)y_1(x_1)-\mu K_1(x_1)y_1(x_1)=\lambda y_1(x_1),\\ A_2(x_2)\dfrac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2}+C_2(x_2)y_2(x_2)-\mu K_2(x_2)y_2(x_2)=\lambda y_2(x_2).\end{cases}$$

Полученную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} A_1(x_1)\dfrac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1}+C_1(x_1)y_1(x_1)=(\lambda E+\mu K_1(x_1))y_1(x_1),\\ A_2(x_2)\dfrac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2}+C_2(x_2)y_2(x_2)=(\lambda E+\mu K_2(x_2))y_2(x_2).\end{cases}$$

Пусть $S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что матрицы A_1 и A_2 – невырожденные и, следовательно, существуют A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда, умножив первое уравнение слева на SA_1^{-1}, а второе на SA_2^{-1}, получим

$$\begin{cases} S\dfrac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1}+SA_1^{-1}(x_1)C_1(x_1)y_1(x_1)=\left(\lambda SA_1^{-1}(x_1)+\mu SA_1^{-1}(x_1)K_1(x_1)\right)y_1(x_1),\\ S\dfrac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2}+SA_2^{-1}(x_2)C_2(x_2)y_2(x_2)=\left(\lambda SA_2^{-1}(x_2)+\mu SA_2^{-1}(x_2)K_2(x_2)\right)y_2(x_2).\end{cases}\tag{3.8}$$

Обозначим

$$G_1 = SA_1^{-1}C_1,\ G_2 = SA_2^{-1}C_2,\ A_{11} = SA_1^{-1},\ A_{12} = SA_1^{-1}K_1,\ A_{21} = SA_2^{-1},\ A_{22} = SA_2^{-1}K_2, \quad (3.9)$$

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \mu. \quad (3.10)$$

Система (3.8) запишется в этом случае в виде двупараметрической системы Дирака, а именно,

$$S\frac{dy_r(x_r)}{dx_r} + G_r(x_r)y_r(x_r) = \sum_{s=1}^{2}\lambda_s A_{rs}(x_r)y_r(x_r), \qquad r = 1,2. \quad (3.11)$$

Докажем теперь обратное. Пусть $y_r(x_r)\,(r=1,2)$ – решение r-го уравнения системы (3.11). Тогда имеем

$$\begin{cases} S\dfrac{dy_1}{dx_1} + G_1y_1 = (\lambda_1A_{11} + \lambda_2A_{12})y_1, \\ S\dfrac{dy_2}{dx_2} + G_2y_2 = (\lambda_1A_{21} + \lambda_2A_{22})y_2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Подставив значения $G_i,\ A_{ij},\ \lambda_i\ \ (i,j=1,2)$ из (3.9), (3.10), получим

$$\begin{cases} S\dfrac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1} + SA_1^{-1}(x_1)C_1(x_1)y_1(x_1) = \left(\lambda SA_1^{-1}(x_1) + \mu SA_1^{-1}(x_1)K_1(x_1)\right)y_1(x_1), \\ S\dfrac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2} + SA_2^{-1}(x_2)C_2(x_2)y_2(x_2) = \left(\lambda SA_2^{-1}(x_2) + \mu SA_2^{-1}(x_2)K_2(x_2)\right)y_2(x_2). \end{cases}$$

Умножив первое уравнение слева на $-A_1S$, а второе на $-A_2S$ и учитывая то, что $S^2=-E$, найдем

$$\begin{cases} A_1(x_1)\dfrac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1} + C_1(x_1)y_1(x_1) = \left(\lambda E + \mu K_1(x_1)\right)y_1(x_1), \\ A_2(x_2)\dfrac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2} + C_2(x_2)y_2(x_2) = \left(\lambda E + \mu K_2(x_2)\right)y_2(x_2). \end{cases} \quad (3.13)$$

Далее, умножив первое равенство (3.13) тензорно справа на $Ey_2(x_2)$, а второе слева на $Ey_1(x_1)$, найдем

$$\begin{cases} \left(A_1(x_1)\otimes E\right)\left(\dfrac{\partial y_1(x_1)}{\partial x_1}\otimes y_2(x_2)\right) + \left(C_1(x_1)\otimes E\right)\left(y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)\right) = \\ = \left(\lambda E\otimes E + \mu K_1(x_1)\otimes E\right)\left(y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)\right), \\ \left(E\otimes B_2(x_2)\right)\left(y_1(x_1)\otimes\dfrac{\partial y_2(x_2)}{\partial x_2}\right) + \left(E\otimes C_2(x_2)\right)\left(y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)\right) = \\ = \left(\lambda E\otimes E + \mu E\otimes K_2(x_2)\right)\left(y_1(x_1)\otimes y_2(x_2)\right) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A(x_1)\dfrac{\partial y(x)}{\partial x_1} + C_1(x_1)\otimes Ey(x) = \left(\lambda E\otimes E + \mu K_1(x_1)\otimes E\right)y(x), \\ B(x_2)\dfrac{\partial y(x)}{\partial x_1} + E\otimes C_2(x_2)y(x) = \left(\lambda E\otimes E + \mu E\otimes K_2(x_2)\right)y(x). \end{cases} \quad (3.14)$$

Вычитая теперь из первого равенства (3.14) второе и учитывая обозначения (3.9), найдем

$$A(x_1)\frac{\partial y(x)}{\partial x_1}-B(x_2)\frac{\partial y(x)}{\partial x_2}+C(x)y(x)=\mu K(x)y(x).$$

Нетрудно проверить, что из краевых условий задачи (2.1) вытекают условия (3.6) и наоборот.

Лемма 2 доказана.

Заметим, что собственные функции задач (2.1) (см. [2], с. 10) и (3.5)–(3.6) совпадают.

В силу условий теоремы, согласно лемме 2, задачу (2.1) можно свести к следующей двупараметрической задаче Дирака:

$$\begin{cases} S\dfrac{dy_r(x_r)}{dx_r}+G_r(x_r)y_r(x_r)=\sum\limits_{s=1}^{2}\lambda_s A_{rs}(x_r)y_r(x_r), \\ y_r(\ell_r)=y_r(0), \qquad r=1,2, \end{cases} \tag{3.15}$$

где G_r и A_{rs} $(r,s=1,2)$ определяются из соотношений (3.7), причем нетрудно проверить, что для указанных в условии теоремы видов матриц A_r, C_r и K_r будем иметь $A_{rs}^{*}=A_{rs}$, $G_r^{*}=G_r$, $r,s=1,2$.

Далее имеем $\Delta_0=A_{11}\otimes A_{22}-A_{12}\otimes A_{21}=SA_1^{-1}\otimes SA_2^{-1}K_2-SA_1^{-1}K_1\otimes SA_2^{-1}=$

$=\left(SA_1^{-1}\otimes SA_2^{-1}\right)\left(E\otimes K_2\right)-\left(SA_1^{-1}\otimes SA_2^{-1}\right)\left(K_1\otimes E\right)=\left(SA_1^{-1}\otimes SA_2^{-1}\right)\left(E\otimes K_2-K_1\otimes E\right)=$

$=-\left(S\otimes S\right)\left(A_1\otimes A_2\right)^{-1}K=S_0(AB)^{-1}K.$

Тогда, согласно условиям теоремы, а также теоремам 1.1, 2.1 (из. [3], с. 10–12), задача (3.5)–(3.6), а следовательно и (2.1), будет иметь счетное множество вещественных собственных значений; собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, будут Δ_0-ортогональны, причем система собственных функций задачи (3.5)–(3.6), а значит и задачи (2.1), полна в пространстве H (см. [3], теорема 2.2) и, следовательно (в силу изоморфности пространств H и $L^2(I)$), в $L^2(I)$. Теорема доказана.

ЕГУ, АрГУ *Поступила 29.04.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
2. **Саакян Г.Г.** – Ученые записки ЕГУ, 2001, т. 2, с. 14–21.
3. **Саакян Г.Г.** – Ученые записки ЕГУ, 2002, т. 1, с. 9–13.

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Գ. Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՄԱՄՆԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Մասնակի ածանցյալներով մի եզրային խնդրի համար ապացուցվում են սեփական արժեքների հաշվելիությունը և սեփական ֆունկցիաների լրիվությունը:

T. N. HARUTUNYAN, G. H. SAHAKYAN

ON A SPECTRAL PROBLEM FOR A SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The accounting of the eigenvalues and the completeness of the eigenfunctions has been proved for a boundary problem with partial derivatives.