

УДК 512.1

Н. В. ШИРВАНЯН, В. Л. ШИРВАНЯН

О ЗАДАНИИ ГРУППЫ 7.7 ИЗ «КОУРОВСКОЙ ТЕТРАДИ»

Рассмотрена одна специальная конечно-определенная группа с двумя образующими и двумя определяющими соотношениями. Приведено более простое задание этой группы.

В известном сборнике нерешенных проблем по теории групп под названием «Коуровская тетрадь» приведена следующая задача (7.7 [1]).

Задана группа $G = \langle a, b; a^9 = 1, ab = b^2 a^2 \rangle$.

Спрашивается – конечна она или нет.

Группа G содержит $F(2, 9)$ – единственную из класса групп Фибоначи, о которой неизвестно, конечна она или бесконечна.

В настоящей статье приведем другое представление группы G .

Пусть P и Q – слова в алфавите группы G . Будем считать $P = Q$, если имеется конечный ряд преобразований, переводящий слово P в Q :

$$P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_n = Q,$$

где каждый переход $P_i \rightarrow P_{i+1}$ получается применением к P_i одного из соотношений группы G и вставкой или сокращением образующих

$$a^r a^{-r} = 1, b^r b^{-r} = 1, (r = \pm 1).$$

Лемма 1. В группе G выполняется соотношение $b^{18} = 1$.

Доказательство. Из определяющих соотношений группы G получаем:

$$(b^{-1}a)^9 = (ba^2b^{-1})^9 = ba^{18}b^{-1} = bb^{-1} = 1.$$

Отсюда $(ab^{-1})^9 = 1$ и, следовательно, $(ba^{-1})^9 = 1$. Но, с другой стороны, из соотношений группы G имеем $ba^{-1} = a^{-1}b^2a$. Следовательно, $1 = (ba^{-1})^9 = (a^{-1}b^2a)^9 = a^{-1}b^{18}a$. Отсюда $b^{18} = 1$. А так как $b^{-1}a$ имеет порядок 9, то порядок элемента b равен 18.

Из леммы 1 следует

Теорема. Группа G имеет представление $G = \langle a, b; a^9 = 1, b^{18} = 1, ab = b^2 a^2 \rangle$.

Введем в G образующие p, q и соотношения $q = a^{-1}, p = b$. Получаем группу $G_1 = \langle a, b, p, q; a^9 = 1, b^{18} = 1, ab = b^2 a^2, q = a^{-1}, p = b \rangle$. Исключая образующие a и b , с применением преобразования Титце [2] получаем группу $G_1 = \langle p, q; q^9 = 1, p^{18} = 1, pq^2 = qp^2, (pq)^9 = 1 \rangle$, причем группы G и G_1 изоморфны ($G \approx G_1$).

Полученное представление нам кажется более наглядным для преобразования слов в G .

Арм. СХА

Поступило 13.06.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. Коуровская тетрадь. Под ред. Блощицына В.Я., Мерзлякова Д.И., Чуркина В.А. Новосибирск, 1986.
2. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974, 455 с.

Ն. Վ. ՇԻՐՎԱՆՅԱՆ, Վ. Լ. ՇԻՐՎԱՆՅԱՆ

ԿՈՈՒՐՈՎՅԱՆ ՏԵՏՐԻՑ 7.7 ԽՄԲԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Գիտարկվում է Կոուրովյան տետրում առաջադրված մի հատուկ խումբ, որը տրված է երկու ծնիցներով և երկու որոշիչ առնչություններով: Ներկա աշխատանքում բերվում է նշված խմբի ավելի պարզ ներկայացում:

N. V. SHIRVANYAN, V. L. SHIRVANYAN

ON PRESENTATIONS OF THE GROUP 7.7 FROM KOUROV NOTEBOOK

Summary

In the well-known book [1] unsolvable problems there is one special group presented by two generators and the defining relations. In this paper we give simple presentations of the group.