

УДК 537.8

Т. А. АРУТЮНЯՆ

## ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ТОРОИДАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

В работе рассматривается проблема определения электромагнитных полей и проводится сравнительный анализ различных методов определения собственных значений и собственных функций в тороидальном резонаторе. Рассматриваются три метода определения собственных частот в тороидальном резонаторе: равномерный коротковолновый асимптотический метод, в котором достигается частичное разделение переменных в уравнении Гельмгольца внесением искусственной неоднородности с тороидальной симметрией и с учетом решения этого уравнения строятся равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Максвелла; метод последовательных приближений, основанный на теории возмущений; численный метод, использующий программный пакет FEMLAB, т.е. метод конечных элементов. Собственные частоты тороидального резонатора определяются этими тремя методами и сравниваются. Показано, что численные результаты с большой точностью совпадают друг с другом для больших торов.

Тороидальный резонатор находит применение в различных схемах физики заряженных частиц и в ускорительной физике. С другой стороны, он является хорошим макетом для исследований электромагнитных свойств системы «токамак».

Для определения собственных частот в тороидальном резонаторе рассмотрим три различных приближенных метода: равномерный коротковолновый асимптотический метод (РКА) [1], метод последовательных приближений (МПП) [2] и метод конечных элементов (FEMLAB) [3]. В статье сначала коротко излагаются все три метода, потом проводится сравнение численных значений, полученных этими методами.

**1. Тороидальная система координат и равномерный коротковолновый асимптотический метод.** Тороидальные координаты  $(\tau, \sigma, \varphi)$  связаны с декартовыми координатами соотношениями [4]:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} \cos \varphi, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} \sin \varphi, \quad z = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}. \quad (1)$$

В этой системе поверхности  $\tau = \operatorname{const}$  описывают торы с «большими» радиусами  $R = a \operatorname{cth} \tau$ , и радиусами поперечного сечения («малыми» радиусами)

$r_0 = a/\text{sh}\tau_1$ , поверхности  $\sigma = \text{const}$  – сферы, центры которых расположены на оси  $z$ , а поверхности  $\varphi = \text{const}$  – полуплоскости, проходящие через ось  $z$  (рис.1). Постоянная  $a$  описывает тороидальную систему координат и связана с радиусами  $R$  и  $r_0$  соотношением  $a = \sqrt{R^2 - r_0^2}$ .

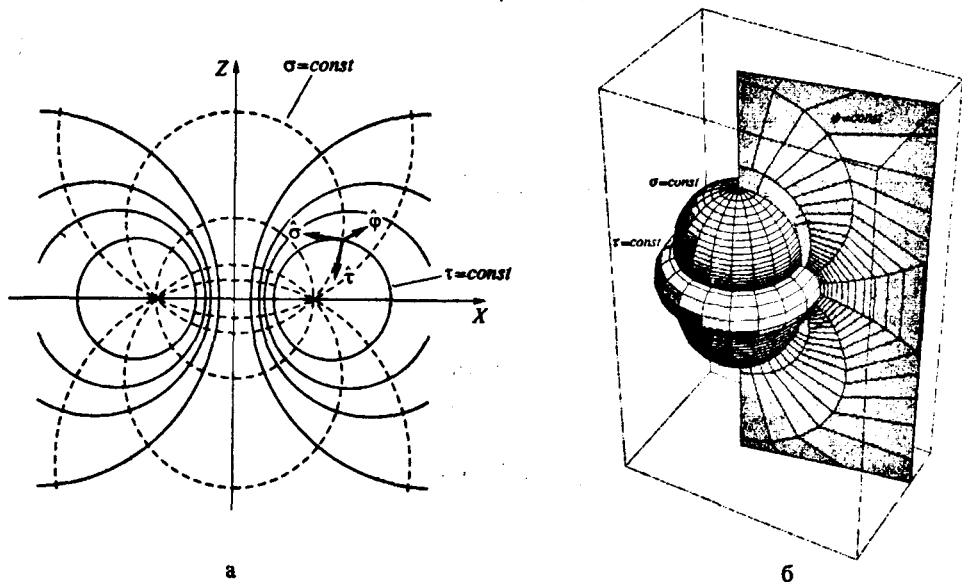


Рис. 1. Координатные линии (а) и поверхности (б) тороидальной системы координат.

Коэффициенты Ламэ в этой системе имеют следующий вид:

$$h_\tau = h_\sigma = \frac{a}{\text{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad h_\varphi = \frac{a \text{sh}\tau}{\text{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad (2)$$

а уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 u + k^2 \epsilon \mu u = 0 \quad (3)$$

записывается в виде

$$p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - p \sin \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} + p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + (p^2 \text{cth}\tau - p \text{sh}\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{p^2}{\text{sh}^2 \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 a^2 \epsilon \mu u = 0, \quad (4)$$

где  $k = 2\pi f/c$  – волновое число,  $c$  – скорость света,  $f$  – частота тороидального резонатора.

Если предположить, что тороид наполнен неоднородным диэлектриком с проницаемостью вида

$$\epsilon(\tau, \sigma) = p^2 / \text{sh}^2 \tau \quad (\mu = 1), \quad (5)$$

где  $p = p(\tau, \sigma) = \text{ch}\tau - \cos\sigma$ , то в этом уравнении сразу разделяется часть, зависящая от переменной  $\varphi$  [1]:

$$u = g(\tau, \sigma) \exp(-im\varphi). \quad (6)$$

В декартовой системе координат зависимость (5) имеет простой вид:

$$\epsilon = \frac{a^2}{x^2 + y^2},$$

т.е. диэлектрическая проницаемость постоянна на цилиндрах  $x^2 + y^2 = \text{const}$ . Конечно, такую зависимость легко реализовать в ограниченной части пространства, в нашем случае – в поперечном сечении тора.

Последующее частичное разделение переменных достигается представлением функции  $g$  в виде

$$g(\tau, \sigma) = \sin \frac{\sigma}{2} \sqrt{\text{ch } \tau - \cos \sigma} f_1(\tau) f_2(\sigma). \quad (7)$$

Тогда получим функцию тора  $f_1(\tau) = P_{p-1/2}^{\sqrt{(ka)^2 - m^2}}(\text{ch } \tau)$ , а  $f_2(\sigma)$  – суть ультрасферические многочлены Гегенбауера,  $f_2(\sigma) = C_{2p-1}^1 \left( \cos \frac{\sigma}{2} \right)$  [5], т.е.

(6) запишется в виде

$$u = \sin \frac{\sigma}{2} (\text{ch } \tau - \cos \sigma)^{1/2} P_{p-1/2}^{\sqrt{(ka)^2 - m^2}}(\text{ch } \tau) C_{2p-1}^1 \left( \cos \frac{\sigma}{2} \right) \exp(-im\varphi). \quad (8)$$

Как было показано в [1], для больших торов компоненты полей могут быть представлены в асимптотическом виде:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{C}{(ka)^2} \left( 1 - \frac{m^2}{(ka)^2} \right)^{-1/2} \text{sh } \tau \sin \frac{\sigma}{2} (\text{ch } \tau - \cos \sigma)^{1/2} \frac{df_1(\tau)}{d\tau} f_2(\sigma) \frac{df_3(\varphi)}{d\varphi}, \\ E_\sigma &= -\frac{C}{(ka)^2} \left( 1 - \frac{m^2}{(ka)^2} \right)^{-1/2} \text{sh } \tau \sin \frac{\sigma}{2} (\text{ch } \tau - \cos \sigma)^{1/2} f_1(\tau) \frac{df_2(\sigma)}{d\sigma} \frac{df_3(\varphi)}{d\varphi}, \\ E_\varphi &= -C \left( 1 - \frac{m^2}{(ka)^2} \right)^{1/2} \sin \frac{\sigma}{2} (\text{ch } \tau - \cos \sigma)^{1/2} f_1(\tau) f_2(\sigma) f_3(\varphi), \\ H_r &= \frac{iC}{ka} \left( 1 - \frac{m^2}{(ka)^2} \right)^{-1/2} \sin \frac{\sigma}{2} (\text{ch } \tau - \cos \sigma)^{3/2} f_1(\tau) \frac{df_2(\sigma)}{d\sigma} f_3(\varphi), \\ H_\sigma &= -\frac{iC}{ka} \left( 1 - \frac{m^2}{(ka)^2} \right)^{-1/2} \sin \frac{\sigma}{2} (\text{ch } \tau - \cos \sigma)^{3/2} \frac{df_1(\tau)}{d\tau} f_2(\sigma) f_3(\varphi), \\ H_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$P_{p-1/2}^{\sqrt{(ka)^2 - m^2}}(\text{ch } \tau) \Big|_{\tau=\tau_1} = 0 \quad (10)$$

на стенках тороида. Выражения для  $H$ -типов волн получаются из (9) путем замен  $E \rightarrow H/\sqrt{\varepsilon}$  и  $H \rightarrow -\sqrt{\varepsilon}E$  [1]. Граничные условия для  $H$ -типов волн имеют вид

$$dP_{p-1/2}^{\sqrt{(ka)^2 - m^2}}(\text{ch } \tau)/d\tau \Big|_{\tau=\tau_1} = 0. \quad (11)$$

**2. Геометрооптическое представление и определение собственных частот методом равномерной коротковолновой асимптотики (РКА).** Как было сказано выше, для больших торов ( $r_0/R \ll 1$  или  $\tau_1 \gg 1$ ) можно использовать равномерный коротковолновый асимптотический вид функции тора [6]. В этом приближении геометрооптические лучи формируют тороидальные каустические поверхности с радиусом

$$r_c = \frac{p}{k} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4p^2}\right) / \left(1 - \left(\frac{m}{ka}\right)^2\right)}, \quad (12)$$

которые не коаксиальны с главным тором  $\tau = \tau_1$ .

Когда  $ka > m$ , эта каустика находится внутри тора, а при  $ka < m$  она расположена вне тора, т.е. для этих значений  $m$  в тороиде не будут существовать колебания, т.к. объем тороида оказывается расположенным в каустической тени. Таким образом, значения  $m$  ограничиваются значениями  $ka$ .

Когда  $ka \gg 1$ , функцию тора можно аппроксимировать по формуле [6]:

$$P_{p-1/2}^{\sqrt{(ka)^2 - m^2}}(\text{ch } \tau) \approx \left[\sqrt{\beta(\tau)} \text{sh } \tau\right]^{-1/2} C \cos\left(k \int_{\bar{\tau}}^{\tau_1} \sqrt{\beta(\tau)} d\tau - \frac{\pi}{4}\right), \quad (13)$$

где  $\beta(\tau) = \frac{(ka)^2 - m^2}{\text{sh}^2 \tau} - \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)$ ,  $C = \text{const}$ ,  $\bar{\tau}$  - координаты каустической тороидальной поверхности. Тогда граничные условия для  $E$ -типа волн примут следующий вид:

$$\int_{\bar{\tau}}^{\tau_1} \sqrt{\frac{(ka)^2 - m^2}{\text{sh}^2 \tau} - \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)} d\tau = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2} + 2n\right), \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Интегрирование последнего выражения приводит к следующему трансцендентному уравнению:

$$I = \sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} \left\{ \text{sh } \bar{\tau} \left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\text{sh}^2 \bar{\tau}}{\text{sh}^2 \tau_1} - 1} + \text{sh } \bar{\tau} \sqrt{\frac{1}{\text{sh}^2 \tau_1} + 1} \right) - \ln \text{ch } \bar{\tau} \right] - \text{arth} \sqrt{\frac{\text{sh}^2 \bar{\tau} - \text{sh}^2 \tau_1}{\text{ch } \tau_1}} \right\} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2} + 2n\right) = 0, \quad (15)$$

которое позволяет определить собственные частоты тороида для данных  $m$ ,  $n$  и  $p$ . Сначала для фиксированных  $p$  и  $n$  определяется каустическая поверхность  $\text{sh } \bar{\tau}$ , подстановка которой в уравнение каустики позволяет получить частоты, соответствующие значениям  $p$  и  $m$ :

$$f_{pnm} = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{m^2 + \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) \text{sh}^2 \bar{\tau}}. \quad (16)$$

**3. Методы последовательных приближений и конечных элементов.** В этих методах используется квазисферическая система координат  $(r, \vartheta, \varphi)$ , связанная с декартовыми координатами соотношениями

$$x = R(1 - \rho \cos \vartheta) \cos \varphi, \quad y = R(1 - \rho \cos \vartheta) \sin \varphi, \quad z = R\rho \sin \vartheta, \quad (17)$$

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \rho = r/R.$$

Координатные поверхности  $r = \text{const}$  описывают коаксиальные торы,  $\vartheta = \text{const}$  — конусы, а  $\varphi = \text{const}$  — полуплоскости, проходящие через ось  $z$ . Коэффициенты Ламэ этой системы координат равны:

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = R(1 - \rho \cos \vartheta) = Rh. \quad (18)$$

С помощью метода последовательных приближений показывается, что в тороидальном резонаторе собственные частоты могут быть представлены в виде [2]

$$f_{pm} = \frac{c}{2\pi r_0} \sqrt{\chi_{pm}^2 + (0,75 + m^2) \rho_0^2 + \left[ \frac{0,75 + m^2}{2} \left( 1 \pm \frac{\delta_{1p}}{2} \right) + \frac{4m^2}{\chi_{pm}^2} \right] \rho_0^4 + \dots}, \quad (19)$$

где  $\chi_{pm}$  —  $n$ -й корень функций Бесселя  $p$ -го порядка,  $\delta_{1p}$  — символ Кронекера,  $m$  — азимутальное квантовое число,  $n$  — радиальное квантовое число, а  $p$  соответствует числу полуволн, укладывающихся в окружности в поперечном сечении тороида,  $\rho_0 = r_0/R$ . В настоящей работе мы ограничимся поправкой  $\rho_0^2$  на кривизну тороидального резонатора. Далее будем искать электромагнитное поле в виде

$$E, H(r, \vartheta, \varphi) = E, H(r, \vartheta) \exp(-im\varphi). \quad (20)$$

Подставляя (20) в уравнения Максвелла, можем показать, что в тороидальном резонаторе существуют волны  $E$ - и  $H$ -типа. При этом продольная компонента  $E_\varphi(r, \vartheta, \varphi)$  удовлетворяет следующему волновому уравнению [3, 7]:

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1 - 2\rho_0 \cos \vartheta}{rh} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\sin \vartheta}{rR(1 - 2\rho_0 \cos \vartheta)} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \vartheta} + \left( k^2 - \frac{m^2}{R^2 h^2} \right) E_\varphi = 0, \quad (21)$$

в котором переменные не разделяются. Это уравнение можно решить численным методом с помощью программного пакета FEMLAB, который использует метод конечных элементов для решения уравнений с частными производными. Для этого надо задать вид области, в которой решается данная задача, а также уравнение на программном языке. Пакет FEMLAB [3] использует декартовую или цилиндрическую систему координат. В данном случае удобно использовать цилиндрическую систему  $(r, \varphi, z)$ . Представим тор в виде окружности с радиусом  $r_0$ , вращающейся на расстоянии  $R$  от оси  $OZ$ . В пакете общий вид волнового уравнения следующий:

$$\nabla \times (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \alpha u + \beta \nabla u = d_\alpha \lambda u, \quad (22)$$

где  $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ . Если искать поле в виде  $E_\varphi(r, \varphi, z) = E_\varphi(r, z) \exp(-im\varphi)$  и

подставить в (22)  $c=r$ ,  $a=m^2/r$ ,  $\beta=\gamma=0$ ,  $\alpha=2$ ,  $d_a=r$ , то получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) r u = 0, \quad (22a)$$

которое соответствует уравнению (21) в цилиндрической системе координат, если ограничиться рассмотрением приближений больших торов. В этом уравнении  $u(r, \varphi, z) = \frac{E_\varphi(r, \varphi, z)}{r}$ . Решая уравнение (22a) для  $E$ -типа волн, получим как собственные частоты тороидального резонатора, так и собственные функции.

**4. Численные результаты и сравнение трех методов.** В качестве примера рассмотрим тороидальные резонаторы с «большим» радиусом  $R=1$  м и «малыми» радиусами  $r_0=0,1$  м и  $r_0=0,01$  м.

Очевидно, что для первого тора  $\text{sh} \tau_1=10$ , а для второго  $\text{sh} \tau_1=100$ . Сначала решаем уравнение (15) графически. На рис. 2 приведены зависимости  $I$  от  $\text{sh} \bar{\tau}$  (а) и от радиуса (б) для  $r_0=0,1$  м,  $n=1$  и  $p=0$ . В этом случае радиус каустики  $r_c=0,033$  м, а  $\text{sh} \bar{\tau} \approx 29,95$ . Подставляя последнее в (16), находим частоты, соответствующие значениям  $m$  для заданного  $p$ .

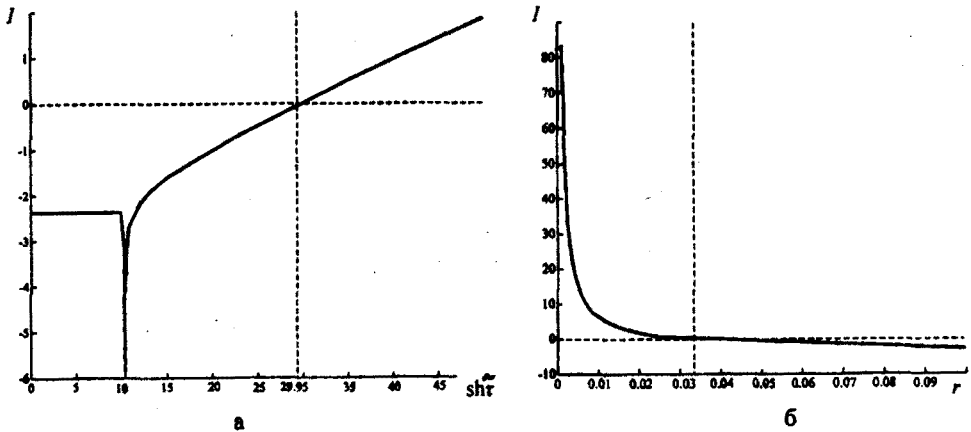


Рис. 2. Зависимость  $I$  от  $\text{sh} \bar{\tau}$  (а) и от  $r$  (б).

На рис.3 приведены распределение компоненты  $E_\varphi$  в плоскости  $XOZ$  и ее зависимость от координат в разных сечениях по  $z$  методом конечных элементов. Вычислим удовлетворяющие уравнению (22a)  $E_\varphi$ .

В таблицах 1 и 2 приведены численные значения собственных частот для  $p=0$ ,  $n=1, 2$  и  $m=0-6$ . Имеется в виду, что в методе РКА случай  $p=1$  соответствует случаю  $p=0$  (МПП, FEM), а  $n=0$  – случаю  $n=1$  (МПП, FEM).

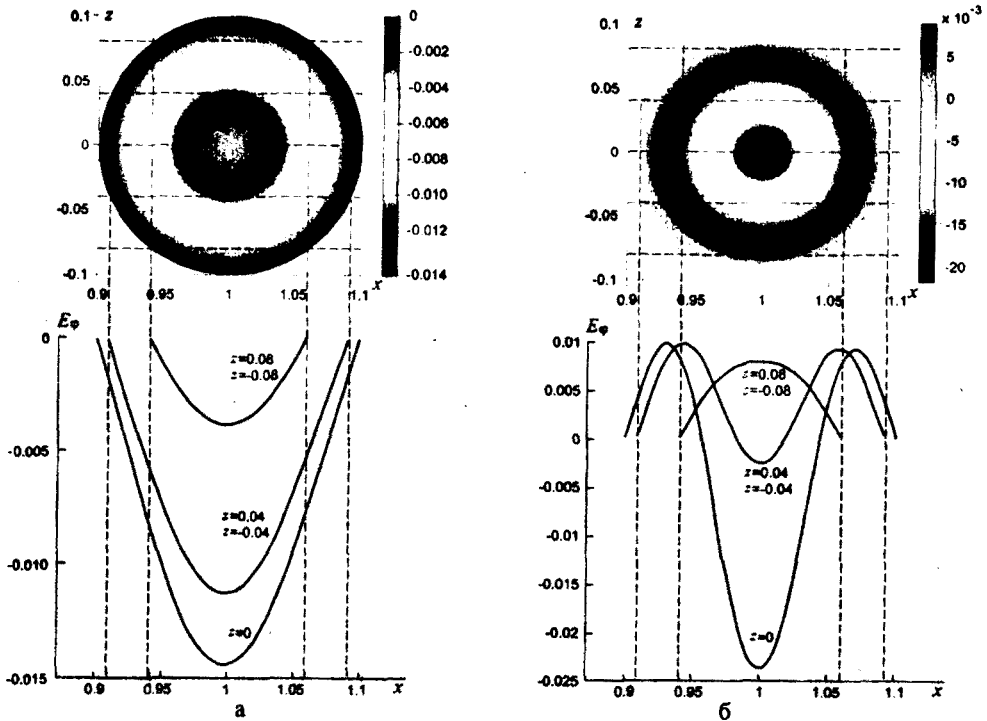


Рис. 3. Распределение компоненты  $E_\varphi$  в плоскости  $XOZ$  и ее зависимость от координат в сечениях  $z = 0, \pm 0,04, \pm 0,08$  тороида с  $R = 1\text{ м}$  и  $r_0 = 0,1\text{ м}$  для частот  $f_{010}$  (а),  $f_{020}$  (б).

Таблица 1

Собственные частоты (в ГГц) тороида с  $R=1\text{ м}$  и  $r_0=0,1\text{ м}$

$m$	$f_{01m}^{FEM}$	$f_{01m}^{МПП}$	$f_{10m}^{PKA}$	$m$	$f_{02m}^{FEM}$	$f_{02m}^{МПП}$	$f_{11m}^{PKA}$
0	1,1490	1,1482	1,2384	0	2,6340	2,6360	2,6822
1	1,1500	1,1491	1,2394	1	2,6353	2,6364	2,6826
2	1,1529	1,1526	1,2421	2	2,6374	2,6377	2,6839
3	1,1579	1,1577	1,2468	3	2,6390	2,6399	2,6860
4	1,1647	1,1607	1,2532	4	2,6413	2,6429	2,6890
5	1,1735	1,1733	1,2615	5	2,6447	2,6468	2,6929
6	1,1841	1,1826	1,2715	6	2,6496	2,6515	2,6976

Таблица 2

Собственные частоты (в ГГц) тороида с  $R=1\text{ м}$  и  $r_0=0,01\text{ м}$

$m$	$f_{01m}^{FEM}$	$f_{01m}^{МПП}$	$f_{10m}^{PKA}$	$m$	$f_{02m}^{FEM}$	$f_{02m}^{МПП}$	$f_{11m}^{PKA}$
0	11,4743	11,5199	12,1285	0	26,3383	26,3856	26,6388
1	11,4744	11,5207	12,1286	1	26,3384	26,3857	26,6388
2	11,4747	11,5203	12,1288	2	26,3385	26,3858	26,6389
3	11,4752	11,5208	12,1293	3	26,3387	26,3860	26,6392
4	11,4759	11,5215	12,1296	4	26,3390	26,3863	26,6395
5	11,4768	11,5224	12,1308	5	26,3394	26,3867	26,6399
6	11,4779	11,5234	12,1318	6	26,3399	26,3872	26,6403

Результаты, полученные тремя методами, отличаются друг от друга не более чем на 7%.

**Заключение.** Проведенное исследование показывает, что результаты, полученные различными приближенными методами, оказываются устойчивыми. Это говорит в пользу того, что найденные собственные значения (собственные частоты) и собственные функции (поля), определенные асимптотически, составляют полный набор, следовательно, могут быть использованы при решении задач по излучению заряженной частицы и сгустков, движущихся в тороидальном резонаторе.

В конце приношу благодарность проф. Э.Д. Газазяну за постановку задачи и руководство работой, а также д.ф.-м.н. М.И. Иваняну и к.ф.-м.н. В.Г. Кочаряну за полезные советы.

*Кафедра теории волновых процессов и физики*

*Поступила 25.02.2005*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Газазян Э.Д., Иванян М.И., Тер-Погосян А.Д. – Изв. НАН Армении. Физика, 1994, т. 29, № 4, с. 141.
2. Газазян Э.Д., Кочарян В.Г., Оксюзян Г.Г. Препринт ЕФИ-1145(22)–89, 1989.
3. Арутюнян Т.А. – Изв. НАН Армении. Физика, 2005, т. 40, № 2, с. 109–114.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
5. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
6. Газазян Э.Д. Препринт ЕФИ-1092(55)–88, 1988.
7. Арутюнян Т.А., Калантарян Д.К. – Изв. НАН Армении. Физика, 2005, т. 40, № 4, с. 244–247.

## Տ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

### ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԵՎ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ ՏՈՐՈՒԴԱՅԻՆ ՌԵԶՈՆԱՏՈՐՆԵՐՈՒՄ

#### Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է տորոիդային ռեզոնատորներում էլեկտրամագնիսական դաշտերի որոշման խնդիրը, ինչպես նաև բերվում են տարբեր մեթոդներով սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների որոշման համեմատական վերլուծությունները: Օգտագործվել են երեք տարբեր մեթոդներ. հավասարաչափ կարճալիքային մոտարկային մեթոդը, որտեղ Հեյմհոլցի հավասարման մեջ փոփոխականները մասնակի անջատվում են, երբ տորոիդը արհեստականորեն լցնում են անհամասեռ միջավայրով, ապա կառուցվում են Մաքսվելի հավասարումների հավասարաչափ կարճալիքային մոտարկային լուծումները; հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը՝ հիմնված գրգռումների տեսության վրա; FEMLAB ծրագրային փաթեթի



կիրառումով թվային մեթոդ, այսինքն՝ վերջավոր տարրերի մեթոդը: Այնուհետև որոշվում են տորոիդային ռեզոնատորի սեփական հաճախությունները այս երեք մեթոդներով: Յույց է տրվում, որ մեծ տորերի համար ստացված արդյունքները մեծ ճշտությամբ համընկնում են:

T. A. HARUTYUNYAN

## THE PROBLEM OF OWN VALUES AND OWN FUNCTIONS IN THE TOROIDAL CAVITY

### Summary

In this work the problem of definition of electromagnetic fields in the toroidal cavity is discussed and is given the analysis of the comparison of the own values and the own functions obtained by different methods. Three methods are discussed to define the own frequencies in the toroidal cavity – the uniform short wave asymptotic method, where the variables are separated partially in the Helmholtz equation when the toroid is filled by an inhomogeneous medium with a toroidal symmetry and then are constructed the uniform short wave asymptotic solutions of Maxwell equations, then the successful approximate method based on the perturbation theory and at last a digital method by the package FEMLAB using the finite element method (FEM). Then it is defined the own frequencies of the toroidal cavity by these three methods. It is shown that the results show a good coincidence for the large torus.