ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 519.6

А. Б. ГРИГОРЯН

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МНОГОСЕТОЧНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА

I. ДВУХСЕТОЧНЫЕ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛИ

Работа, состоящая из двух частей, посвящена построению алгебраических многосеточных переобуславливателей для матриц жесткости, возникающих при конечноэлементной аппроксимации эллиптических уравнений в прямоугольных областях. На одной части границы области стоит условие Дирихле, а на другой – краевое условие третьего рода. В первой части работы излагается построение последовательности двухсеточных переобуславливателей, являющейся основой для построения многосеточного переобуславливателя.

1. Введение. В настоящей работе описывается построение алгебраического многосеточного переобуславливателя для матрицы жесткости, возникающей при конечноэлементной дискретизации двумерной модельной эллиптической задачи. В основе построения лежит техника разбиения области на малые подструктуры, впервые предложенная в [1], а затем получившая свое дальнейшее развитие в работах [2–5] и др. Во всех этих статьях рассматривались краевые условия типа Дирихле–Неймана. Поэтому интерес представляет возможность распространения упомянутого подхода на случай, когда на одной части границы области стоит условие Дирихле, а на другой – краевое условие третьего рода.

2. Постановка модельной эллиптической граничной задачи. Рассмотрим в плоскости с декартовыми координатами $x=(x_1,x_2)$ область Ω с границей $\partial\Omega$, являющуюся объединением некоторого числа прямоугольников Π_m, $m=1,2,\dots,l$, со сторонами, параллельными координатным осям. При этом любые два прямоугольника либо не пересекаются, либо имеют только общую вершину или сторону (рис. 1).

Определим Γ_0 или как пустое множество, или как замкнутое подмножество границы $\partial\Omega$, состоящее из сторон прямоугольников Π_m. Далее, пусть $\Gamma_1=\partial\Omega\setminus\Gamma_0$. Обозначим через $H_0^1(\Omega)$ подпространство пространства

Соболева $H^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на Γ_0.

Рассмотрим вариационную формулировку следующей модельной эллиптической граничной задачи: *для заданной функции* $f \in L_2(\Omega)$ *найти функцию* $u \in H_0^1(\Omega)$ *такую, что*

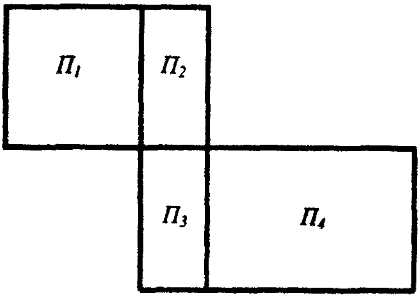

Рис. 1. Пример области Ω ($l = 4$).

$$b(u,v) = (f,v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.1}$$

где

$$b(u,v) \equiv \int_\Omega c \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \sigma u v d\gamma,$$
$$(f,v)_\Omega \equiv \int_\Omega f v dx. \tag{2.2}$$

Предполагается, что c – положительная, постоянная в каждом прямоугольнике Π_m функция, то есть $c(x) \equiv c_m$ для $x \in \Pi_m$. Аналогично σ – положительная, постоянная на каждом *звене* ломаной Γ_1 функция. Под *звеньями* ломаной Γ_1 мы понимаем стороны прямоугольников Π_m, из которых состоит эта ломаная. Пусть $[z]$ – некоторое звено ломаной Γ_1. Значение функции σ на этом звене обозначим через $\sigma[z]$.

3. Иерархические сетки. Пусть прямоугольники Π_m, $m = 1, 2, ..., l$, таковы, что в каждом из них можно построить квадратную сетку с некоторым шагом h_0, общим для всех прямоугольников. Тем самым во всей области Ω будет построена начальная квадратная сетка ω_0 с шагом h_0. Процесс построения *иерархической* последовательности квадратных сеток основан на следующей процедуре измельчения: *каждая ячейка имеющейся сетки с помощью отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, разбивается на четыре квадрата.* Ограничимся некоторым целым числом $p \geq 1$. Руководствуясь приведенным выше правилом измельчения сетки, исходя из ω_0,

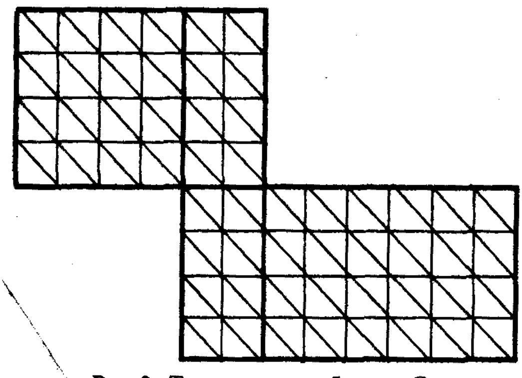

Рис. 2. Триангуляция области Ω.

построим последовательность квадратных сеток ω_k, $k = 0, 1, 2, ..., p$. Будем говорить, что сетка ω_k соответствует k-му *уровню* измельчения сетки. Таким образом, p-му уровню соответствует самая мелкая сетка ω_p, а нулевому уровню – самая грубая сетка ω_0. Через h_k обозначим шаг сетки ω_k. По построению, $h_k = 2^{-k} h_0$.

На всех уровнях измельчения квадратных сеток осуществим триангуляцию области Ω путем разбиения каждой ячейки квадратной сетки с помощью диагонали, образующей тупой угол с осью Ox_1, на два прямоугольных треугольника (рис. 2). Тем самым мы получим последовательность вложенных триангуляций τ_k области Ω, где $k = 0, 1, 2, ..., p$.

Для значений $k = 0, 1, 2, ..., p$ введем следующие обозначения: N_k – множество узлов сетки ω_k, принадлежащих $\overline{\Omega} \setminus \Gamma_0$; n_k – число узлов в множестве N_k; G_k – пространство сеточных функций, заданных на множестве N_k; V_k – пространство непрерывных в области $\overline{\Omega}$ функций, линейных на каждом треугольнике триангуляции τ_k и обращающихся в нуль на Γ_0.

Между сеточными функциями из G_k и кусочно-линейными функциями из V_k имеет место естественное взаимно однозначное соответствие. А именно, функции $\hat{u} \in V_k$ ставится в соответствие сеточная функция $u \in G_k$, i-ая компонента которой равна значению функции $\hat{u}$ в i-ом узле множества N_k. При этом говорят, что функция $\hat{u}$ является *восполнением* сеточной функции u в пространстве функций V_k: $\hat{u} = prol(u \in G_k : V_k)$.

Как было уже сказано выше, ломаная Γ_1 есть объединение звеньев $[z]$. Далее, на всех уровнях k, где $0 \le k \le p$, каждое звено $[z]$, а значит и вся ломаная Γ_1, есть объединение *сегментов* $< a,b >$, являющихся сторонами треугольников триангуляции τ_k (a и b – вершины треугольников, лежащих на $\overline{\Gamma}_1$). Обозначим через $\Gamma_1^k[z]$ и Γ_1^k множества сегментов k-го уровня, принадлежащих звену $[z]$ и всей ломаной Γ_1 соответственно.

Введем некоторые понятия и термины, которые понадобятся нам в ходе дальнейшего изложения. Рассмотрим k-й уровень измельчения сетки, где $0 \le k \le p$. Треугольники триангуляции τ_k назовем *линейными треугольными элементами* k-го уровня или LT-*элементами* (*linear triangular element*). Квадратные ячейки сетки, разбитые в процессе триангуляции на два треугольника, назовем *сдвоенными линейными треугольными элементами* k-го уровня или DLT-*элементами* (*doubled LT*) (рис. 3, а). Фактически DLT-элемент является объединением двух LT-элементов. Для всех значений $k = 0, 1, 2, ..., p$ обозначим через d_k множество DLT-элементов k-го уровня.

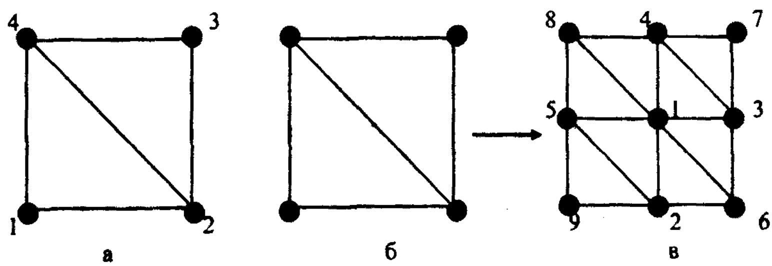

Рис. 3. а – DLT-элемент; б – DLT-элемент $e \in d_{k-1}$; в – соответствующий DLT-суперэлемент $E \in D_k$.

Рассмотрим некоторый DLT-элемент $e \in d_{k-1}$, где $1 \le k \le p$. На следующем этапе измельчения сетки он разбивается на четыре DLT-элемента k-го уровня, как показано на рис. 3 (б, в). В результате DLT-элемент $e \in d_{k-1}$ превращается на k-ом уровне в DLT-*суперэлемент* E. Для всех значений $k = 1, 2, 3 \ldots, p$ обозначим через D_k множество DLT-суперэлементов k-го уровня.

Пусть $1 \le k \le p$. Разобьем множество узлов N_k на три непересекающихся подмножества

$$N_k = N_k^{(1)} \cup N_k^{(2)} \cup N_k^{(3)}, \tag{3.1}$$

где $N_k^{(1)}$ – множество узлов, являющихся центрами DLT-суперэлементов (рис. 3, в, узел 1), $N_k^{(2)}$ – множество узлов, являющихся серединами сторон DLT-суперэлементов (узлы 2, 3, 4, 5), $N_k^{(3)}$ – множество узлов, являющихся вершинами DLT-суперэлементов (узлы 6, 7, 8, 9). По определению, $N_k^{(1)} \cup N_k^{(2)} = N_k \setminus N_{k-1}$, $N_k^{(3)} = N_{k-1}$. Если через $n_k^{(i)}$ обозначить число узлов в множестве $N_k^{(i)}$, то $n_k^{(1)} + n_k^{(2)} = n_k - n_{k-1}$, $n_k^{(3)} = n_{k-1}$. В соответствии с разбиением (3.1) примем следующий порядок нумерации узлов множества N_k: *сначала нумеруются узлы множества* $N_k^{(1)}$, *затем узлы* $N_k^{(2)}$ *и, наконец, узлы* $N_k^{(3)}$.

Для значений $k = 1, 2, 3 \ldots, p$ в соответствии с принятым правилом нумерации узлов произвольную сеточную функцию $u \in G_k$ можно представить в виде

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad u_i \in G_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $G_k^{(i)}$ – пространство сеточных функций, заданных на множестве узлов $N_k^{(i)}$.

4. Конечноэлементная система уравнений. Сформулируем теперь конечноэлементную задачу, соответствующую задаче (2.1)–(2.2): *для заданной функции* $f \in L_2(\Omega)$ *найти функцию* $\hat{u} \in V_p$ *такую, что*

$$b(\hat{u}, \hat{v}) = (f, \hat{v})_\Omega \qquad \forall \hat{v} \in V_p. \tag{4.1}$$

Задача (4.1) приводит к системе сеточных уравнений

$$Au = g \tag{4.2}$$

с симметричной положительно определенной матрицей $A \equiv A^{(p)}$ порядка n_p и с правой частью $g \in G_p$. При этом справедливы равенства

$$v^T A u = b(\hat{u}, \hat{v}) \qquad \forall u, v \in G_p, \tag{4.3}$$

$$v^T g = (f, \hat{v})_\Omega \qquad \forall v \in G_p . \tag{4.4}$$

В (4.3) и (4.4) имеем $\hat{u} = prol(u : V_p)$, $\hat{v} = prol(v : V_p)$.

Рассмотрим k-й уровень измельчения сетки, где $0 \le k \le p$. Приведем два вспомогательных утверждения, играющих важную роль в дальнейших построениях.

Для произвольного DLT-элемента $e \in d_k$, нумерация узлов которого дана на рис. 3, а, определим билинейный функционал

$$\begin{aligned} \varphi_e(u,v) \equiv (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) + (u_3 - u_2)(v_3 - v_2) + \\ + (u_4 - u_3)(v_4 - v_3) + (u_1 - u_4)(v_1 - v_4), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где u_i и v_i есть значения функций u и v в узле с номером i ($i = 1, 2, 3, 4$). Следующее утверждение, приведенное в работе [1], легко устанавливается с помощью прямых вычислений.

Лемма 4.1. Для любых функций $\hat{u}, \hat{v} \in V_k$ имеет место равенство

$$\int_e \nabla \hat{u} \nabla \hat{v}\, dx = \frac{1}{2} \varphi_e(\hat{u}, \hat{v}). \tag{4.6}$$

Пусть $< a,b > \in \Gamma_1^k$ есть некоторый сегмент ломаной Γ_1 (см. п. 3). Введем в рассмотрение билинейные функционалы

$$\rho_{<a,b>}(u,v) \equiv (u(a) - u(b))(v(a) - v(b)) \tag{4.7}$$

и

$$\psi_{<a,b>}(u,v) \equiv (u(a) + u(b))(v(a) + v(b)), \tag{4.8}$$

где $u(a)$, $u(b)$ и $v(a)$, $v(b)$ есть значения функций u и v соответственно в узлах a, b. Справедливость следующего утверждения также легко устанавливается с помощью прямых вычислений.

Лемма 4.2. Для любых функций $\hat{u}, \hat{v} \in V_k$ имеет место равенство

$$\int_{<a,b>} \hat{u}\, \hat{v}\, d\gamma = \frac{h_k}{12} \Big[\rho_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) + 3\psi_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) \Big]. \tag{4.9}$$

Запишем равенство (4.3), посредством которого определяется матрица $A^{(p)}$, в виде

$$v^T A^{(p)} u = \sum_{e \in d_p} c_e \int_e \nabla \hat{u} \nabla \hat{v}\, dx + \sum_{[z]} \sum_{<a,b> \in \Gamma_1^p[z]} \sigma[z] \int_{<a,b>} \hat{u}\hat{v}\, d\gamma$$

(через c_e обозначено сужение функции c на DLT-элементе e).

Пользуясь леммами 4.1 и 4.2, из последнего равенства получим, что матрица $A^{(p)}$ удовлетворяет соотношению

$$v^T A^{(p)} u = \frac{1}{2} \sum_{e \in d_p} c_e \varphi_e(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{[z]} \sum_{<a,b> \in \Gamma_1^p[z]} \Big[r^p[z] \rho_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) + s^p[z] \psi_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) \Big] \tag{4.10}$$

для всех $u, v \in G_p$, где

$$r^p[z] = \frac{h_p}{12} \sigma[z] \quad , \quad s^p[z] = \frac{h_p}{4} \sigma[z]. \tag{4.11}$$

5. Двухсеточные переобуславливатели. Основываясь на полученном соотношении (4.10), которому удовлетворяет матрица $A \equiv A^{(p)}$, построим последовательность матриц конечноэлементного типа

$$A^{(p)}, A^{(p-1)}, \dots, A^{(1)}, A^{(0)} \tag{5.1}$$

и соответствующую последовательность переобуславливателей

$$B^{(p)}, B^{(p-1)}, \dots, B^{(1)}, \tag{5.2}$$

ассоциированных с сетками ω_k, $k = p, p-1, \dots, 0$.

Пусть для некоторого значения k, где $1 \le k \le p$, имеется матрица $A^{(k)}$, определяемая с помощью соотношения

$$v^T A^{(k)} u = \frac{1}{2} \sum_{e \in d_k} c_e \varphi_e(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{[z]} \sum_{<a,b> \in \Gamma_1^k[z]} \left[r^k[z] \rho_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) + s^k[z] \psi_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) \right], \tag{5.3}$$

которое предполагается выполненным для всех $u, v \in G_k$ ($\hat{u} = prol(u : V_k)$, $\hat{v} = prol(v : V_k)$). Положительные величины $r^k[z]$ и $s^k[z]$, ассоциированные со звеньями ломаной Γ_1, считаются заданными.

Для DLT-суперэлемента $E \in D_k$, нумерация узлов которого дана на рис. 3, в, определим билинейные функционалы

$$\begin{aligned} \Phi_E(u,v) \equiv {} & (u_2 - u_9)(v_2 - v_9) + (u_2 - u_6)(v_2 - v_6) + (u_3 - u_6)(v_3 - v_6) + \\ & + (u_3 - u_7)(v_3 - v_7) + (u_4 - u_7)(v_4 - v_7) + (u_4 - u_8)(v_4 - v_8) + \\ & + (u_5 - u_8)(v_5 - v_8) + (u_5 - u_9)(v_5 - v_9) \end{aligned} \tag{5.4}$$

и

$$\overset{0}{\Phi}_E(u,v) \equiv \sum_{j=2}^{5} (u_1 - u_j)(v_1 - v_j). \tag{5.5}$$

Вернемся к соотношению (5.3). Осуществляя в правой части группировку DLT-элементов из d_k в суперэлементы множества D_k, получим соотношение

$$\begin{aligned} v^T A^{(k)} u = {} & \frac{1}{2} \sum_{E \in D_k} c_E [\Phi_E(\hat{u}, \hat{v}) + 2\overset{0}{\Phi}_E(\hat{u}, \hat{v})] + \\ & + \sum_{[z]} \sum_{<a,b> \in \Gamma_1^k[z]} \left[r^k[z] \rho_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) + s^k[z] \psi_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) \right], \end{aligned} \tag{5.6}$$

справедливое для всех $u, v \in G_k$ (через c_E обозначено сужение коэффициента c на суперэлемент E). В соответствии с правилом нумерации узлов множества N_k, определенным в п. 3, матрица $A^{(k)}$ представима в блочном виде

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & A_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

с $n_k^{(i)} \times n_k^{(j)}$-блоками $A_{ij}^{(k)}$. При этом блоки $A_{ii}^{(k)}$, $i = 1, 2, 3$, являются невырожденными диагональными матрицами.

Определим сначала матрицу $\overline{B}^{(k)}$ порядка n_k с помощью соотношения

$$v^T \overline{B}^{(k)} u = \frac{1}{2} \sum_{E \in D_k} c_E \Phi_E(\hat{u},\hat{v}) + \mu \sum_{[z]} \sum_{<a,b> \in \Gamma_1^k[z]} \left[r^k[z] \rho_{<a,b>}(\hat{u},\hat{v}) + s^k[z] \psi_{<a,b>}(\hat{u},\hat{v}) \right], \tag{5.8}$$

справедливого для всех $u, v \in G_k$ (величина μ, $0 < \mu \le 1$, будет определена ниже). В силу определения матрица $\overline{B}^{(k)}$ имеет следующую структуру:

$$\overline{B}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{(k)} & B_{23}^{(k)} \\ 0 & B_{32}^{(k)} & B_{33}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

где блоки $B_{22}^{(k)}$ и $B_{33}^{(k)}$ являются невырожденными диагональными матрицами. Далее определим матрицу

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)^{-1}} A_{12}^{(k)} & B_{23}^{(k)} \\ 0 & B_{32}^{(k)} & B_{33}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

которую будем рассматривать в качестве *переобуславливателя* для матрицы $A^{(k)}$.

Рассмотрим матрицу

$$S_{33}^{(k)} \equiv B_{33}^{(k)} - B_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} B_{23}^{(k)}. \tag{5.11}$$

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. Пусть сеточная функция $u = \begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T & u_3^T \end{bmatrix}^T \in G_k$ удовлетворяет соотношению

$$B_{22}^{(k)} u_2 + B_{23}^{(k)} u_3 = 0 \tag{5.12}$$

и $\hat{u} = prol(u : V_k)$. Тогда для любого узла $\beta \in \omega_k \setminus \omega_{k-1}$:

а) если $\beta \in \Gamma_1$, то

$$\hat{u}(\beta) = \frac{c_E + 2\mu(r^k[z] - s^k[z])}{2c_E + 4\mu(r^k[z] + s^k[z])} (\hat{u}(\alpha_1) + \hat{u}(\alpha_2)); \tag{5.13}$$

б) если $\beta \notin \Gamma_1$, то

$$\hat{u}(\beta) = \frac{1}{2}(\hat{u}(\alpha_1) + \hat{u}(\alpha_2)), \tag{5.14}$$

где α_1 и α_2 – соседние с β узлы сетки ω_k, являющиеся одновременно узлами сетки ω_{k-1}.

Доказательство. Пусть $\beta \in \Gamma_1$ и принадлежит некоторому звену $[z]$. Так как узел $\beta \in \omega_k \setminus \omega_{k-1}$, то по построению он не совпадает ни с одним из концов этого звена. Выберем сеточную функцию $w \in G_k$ следующим образом: положим ее равной единице в узле β и равной нулю в остальных узлах множества N_k. Соответственно $\hat{w} = prol(w : V_k)$. В силу структуры (5.9) матрицы $\overline{B}^{(k)}$ и условия (5.12) очевидно, что $w^T \overline{B}^{(k)} u = 0$. С другой стороны, в силу выбора сеточной функции w из (5.8) имеем

$$w^T \overline{B}^{(k)} u = \frac{c_E}{2}(2\hat{u}(\beta) - \hat{u}(\alpha_1) - \hat{u}(\alpha_2)) + \mu r^{(k)}[z](2\hat{u}(\beta) - \hat{u}(\alpha_1) - \hat{u}(\alpha_2)) +$$

$$+ \mu s^{(k)}[z](2\hat{u}(\beta) + \hat{u}(\alpha_1) + \hat{u}(\alpha_2)).$$

Приравнивая к нулю правую часть последнего равенства, получим (5.13). Соотношение (5.14) выводится аналогично. Лемма доказана.

Возвратимся к матрице $S_{33}^{(k)}$, определенной в (5.11). Возьмем произвольные сеточные функции $u_3, v_3 \in G_k^{(3)}$. Пусть $u = \begin{bmatrix} 0 & u_2^T & u_3^T \end{bmatrix}^T$, где $u_2 \in G_k^{(2)}$ определяется из условия (5.12), и $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_3^T \end{bmatrix}^T$. Тогда

$$v_3^T S_{33}^{(k)} u_3 = v^T \overline{B}^{(k)} u,$$

и согласно (5.8) имеем

$$v_3^T S_{33}^{(k)} u_3 = \frac{1}{2}\left[\sum_{E \in D_k} c_E \Phi_E(\hat{u}, \hat{v}) + 2\mu \sum_{[z]} \sum_{<a,b> \in \Gamma_1^k[z]} \left(r^k[z] \rho_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) + s^k[z] \psi_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) \right) \right].$$

Отсюда, пользуясь леммой 5.1, в результате преобразований первого слагаемого в правой части последнего равенства получим

$$v_3^T S_{33}^{(k)} u_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \sum_{e \in d_{k-1}} c_e \varphi_e(\hat{u}_3, \hat{v}_3) + \sum_{[z]} \sum_{<\alpha_1,\alpha_2> \in \Gamma_1^{k-1}[z]} \frac{2\mu c_e s^k[z]}{c_e + 2\mu(r^k[z] + s^k[z])} \times \right.$$

$$\left. \times\, \psi_{<\alpha_1,\alpha_2>}(\hat{u}_3, \hat{v}_3) + 2\mu \sum_{[z]} \sum_{<a,b> \in \Gamma_1^k[z]} \left(r^k[z] \rho_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) + s^k[z] \psi_{<a,b>}(\hat{u}, \hat{v}) \right) \right],$$

где $e \in d_{k-1}$ есть DLT-элемент $(k-1)$-го уровня, который на следующем этапе измельчения сетки переходит в DLT-суперэлемент E, и $\hat{u}_3 = prol(u_3 : V_{k-1})$, $\hat{v}_3 = prol(v_3 : V_{k-1})$. Далее, опять же пользуясь леммой 5.1, в силу определения сеточных функций u и v получим равенство

$$v_3^T S_{33}^{(k)} u_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \sum_{e \in d_{k-1}} c_e \varphi_e(\hat{u}_3, \hat{v}_3) + \right.$$

$$+ \sum_{[z]} \sum_{<\alpha_1,\alpha_2> \in \Gamma_1^{k-1}[z]} \frac{2\mu c_e s^k[z]}{c_e + 2\mu(r^k[z] + s^k[z])} \psi_{<\alpha_1,\alpha_2>}(\hat{u}_3, \hat{v}_3) +$$

$$+ \sum_{[z]} \sum_{<\alpha_1,\alpha_2> \in \Gamma_1^{k-1}[z]} \mu(r^k[z] + s^k[z]) \rho_{<\alpha_1,\alpha_2>}(\hat{u}_3, \hat{v}_3) +$$

$$\left. + \sum_{[z]} \sum_{<\alpha_1,\alpha_2> \in \Gamma_1^{k-1}[z]} \frac{2\mu s^k[z](c_e + 4\mu r^k[z])}{c_e + 2\mu(r^k[z] + s^k[z])} \psi_{<\alpha_1,\alpha_2>}(\hat{u}_3, \hat{v}_3) \right].$$

Осуществив в правой части последнего равенства приведение подобных членов, получим, что матрица $S_{33}^{(k)}$ удовлетворяет соотношению

$$v_3^T S_{33}^{(k)} u_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{e\in d_{k-1}} c_e \varphi_e(\hat{u}_3, \hat{v}_3) + \right.$$
$$\left. + \sum_{[z]} \sum_{<a,b>\in\Gamma_1^{k-1}[z]} \left(r^{k-1}[z]\rho_{<a,b>}(\hat{u}_3,\hat{v}_3) + s^{k-1}[z]\psi_{<a,b>}(\hat{u}_3,\hat{v}_3)\right)\right] \tag{5.15}$$

для всех $u_3, v_3 \in G_k^{(3)}$, где

$$r^{k-1}[z] = \mu(r^k[z] + s^k[z]), \tag{5.16}$$

$$s^{k-1}[z] = \frac{4\mu s^k[z](c_e + 2\mu r^k[z])}{c_e + 2\mu(r^k[z] + s^k[z])}. \tag{5.17}$$

Итак, имея матрицу $A^{(k)}$, определенную посредством соотношения (5.3), мы построили для нее переобуславливатель $B^{(k)}$ (см. (5.10)). Далее, для матрицы $S_{33}^{(k)}$, определенной в (5.11), было получено соотношение (5.15). Сравнивая (5.15) с (5.3), определим матрицу

$$A^{(k-1)} = 2S_{33}^{(k)}, \tag{5.18}$$

ассоциированную с сеткой ω_{k-1}. Основываясь на равенстве (5.18), назовем матрицу $B^{(k)}$ *двухсеточным переобуславливателем* для матрицы $A^{(k)}$. С учетом (5.11) и (5.18) блочное представление (5.10) переобуславливателя $B^{(k)}$ можно записать в следующем виде:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)^{-1}} A_{12}^{(k)} & B_{23}^{(k)} \\ 0 & B_{32}^{(k)} & \frac{1}{2}A^{(k-1)} + B_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} B_{23}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Таким образом, имея исходную конечноэлементную матрицу $A \equiv A^{(p)}$ системы сеточных уравнений (4.2) на самой мелкой сетке, мы построили последовательность (5.1) конечноэлементных матриц и соответствующую последовательность двухсеточных переобуславливателей (5.2). Рассмотрим теперь вопрос об установлении границ спектра матриц $B^{(k)^{-1}} A^{(k)}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Для всех значений $k = 1, 2, \ldots, p$, независимо от значений коэффициента c и функции σ из (2.2) в подобластях Π_m и на звеньях ломаной Γ_1 соответственно, собственные числа матриц $B^{(k)^{-1}} A^{(k)}$ принадлежат отрезку $[1, \max(3, \mu^{-1})]$.

Доказательство. Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$A^{(k)} u = \lambda B^{(k)} u. \tag{5.20}$$

Как нетрудно заметить, из блочных представлений (5.7) и (5.10) матриц $A^{(k)}$

и $B^{(k)}$ соответственно $\lambda=1$ является собственным числом задачи (5.20). Далее, при дополнительном условии $\lambda\neq 1$ задача (5.20) сводится к спектральной задаче

$$A^{(k)}u=\lambda\overline{B}^{(k)}u. \tag{5.21}$$

Из соотношений (5.6) и (5.8) очевидно, что

$$u^T A^{(k)}u\geq u^T\overline{B}^{(k)}u \qquad \forall u\in G_k$$

(напомним, что по сделанному выше предположению $0<\mu\leq 1$). Тем самым все собственные числа задачи (5.21) удовлетворяют условию $\lambda\geq 1$.

Перейдем теперь к верхней оценке собственных чисел задачи (5.21). Для произвольной сеточной функции $u\neq 0$ согласно (5.6) и (5.8) имеем

$$\frac{u^T A^{(k)}u}{u^T\overline{B}^{(k)}u}=\frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{E\in D_k}c_E[\Phi_E(\hat{u},\hat{u})+2\overset{0}{\Phi}_E(\hat{u},\hat{u})]+I(\hat{u},\hat{u})}{\frac{1}{2}\sum\limits_{E\in D_k}c_E\Phi_E(\hat{u},\hat{u})+\mu I(\hat{u},\hat{u})},$$

где
$$I(\hat{u},\hat{u})\equiv\sum_{[z]}\sum_{<a,b>\in\Gamma_1^k[z]}\left[r^k[z]\rho_{<a,b>}(\hat{u},\hat{u})+s^k[z]\psi_{<a,b>}(\hat{u},\hat{u})\right].$$

Если $\hat{u}\equiv const\neq 0$, то из определений (5.4) и (5.5) билинейных функционалов следует, что $\Phi_E(\hat{u},\hat{u})=\overset{0}{\Phi}_E(\hat{u},\hat{u})=0$. Одновременно $I(\hat{u},\hat{u})\neq 0$. Поэтому

$$\frac{u^T A^{(k)}u}{u^T\overline{B}^{(k)}u}=\frac{1}{\mu}.$$

Если же $\hat{u}\neq const$, то $$\frac{u^T A^{(k)}u}{u^T\overline{B}^{(k)}u}\leq\max\left(\frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{E\in D_k}c_E[\Phi_E(\hat{u},\hat{u})+2\overset{0}{\Phi}_E(\hat{u},\hat{u})]}{\frac{1}{2}\sum\limits_{E\in D_k}c_E\Phi_E(\hat{u},\hat{u})},\frac{1}{\mu}\right).$$

Используя технику перехода на суперэлементный уровень, разработанную в работах [1,2], можно доказать, что

$$\frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{E\in D_k}c_E[\Phi_E(\hat{u},\hat{u})+2\overset{0}{\Phi}_E(\hat{u},\hat{u})]}{\frac{1}{2}\sum\limits_{E\in D_k}c_E\Phi_E(\hat{u},\hat{u})}\leq 3.$$

При этом отметим, что эта оценка была фактически получена в работе [1]. Тем самым мы получаем верхнюю оценку $\max(3,\mu^{-1})$ для собственных чисел задачи (5.21). □

Как показывает простой анализ, для ограничения роста величин $r^k[z]$ и $s^k[z]$ при неограниченном возрастании числа уровней измельчения сетки при определении матриц $\overline{B}^{(k)}$ (см. (5.8)) достаточно взять $\mu=0,5$. Действительно, в этом случае рекуррентные формулы (4.11), (5.16) и (5.17) примут следующий вид:

$$r^p[z]=\frac{h_p}{12}\sigma[z],\qquad s^p[z]=\frac{h_p}{4}\sigma[z];$$
$$r^{k-1}[z]=\frac{1}{2}\left(r^k[z]+s^k[z]\right),\quad s^{k-1}[z]=\frac{2s^k[z]\left(c[z]+r^k[z]\right)}{c[z]+r^k[z]+s^k[z]},\quad k=p,p-1,\ldots,1, \tag{5.22}$$

где $c[z]$ – значение коэффициента c в том прямоугольнике Π_m, стороной которого является звено $[z]$.

Обозначим $\sigma_* \equiv \max\limits_{[z]}\sigma[z]$. Из (4.11) имеем

$$r^p[z]\le q2^{-p},\ s^p[z]\le 3q2^{-p},$$

где $q\equiv\dfrac{h_0\sigma_*}{12}$ (h_0 – шаг самой грубой сетки ω_0). Пользуясь формулами (5.22), легко получить оценки $r^{p-j}[z]\le q2^{-p+j}$, $s^{p-j}[z]\le 3q2^{-p+j}$, $j=0,1,\ldots,p$. Тем самым $r^k[z]\le q$, $s^k[z]\le 3q$, $k=0,1,\ldots,p$.

После выбора величины $\mu=0{,}5$ полученное выше утверждение теоремы 5.1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.1А. Для всех значений $k=1,2,\ldots,p$, независимо от значений коэффициента c и функции σ из (2.2) в подобластях Π_m и на звеньях ломаной Γ_1 соответственно, собственные числа матриц $B^{(k)^{-1}}A^{(k)}$ принадлежат отрезку $[1,3]$.

6. Заключение. Итак, в предыдущих параграфах на иерархических сетках были построены последовательность конечноэлементных матриц $A^{(p)},A^{(p-1)},\ldots,A^{(1)},A^{(0)}$ и соответствующая последовательность двухсеточных переобуславливателей $B^{(p)},B^{(p-1)},\ldots,B^{(1)}$. При этом отметим, что, в отличие от традиционных многосеточных конструкций, здесь при переходе с мелкой сетки на более грубую происходит искажение конечноэлементных операторов на части границы, где стоит третье краевое условие; они не являются (за исключением $A^{(p)}$) конечноэлементными аналогами оператора дифференциальной задачи. Однако за счет выбора параметра $\mu=0{,}5$ в (5.8) удалось получить те же границы спектра переобусловленных конечноэлементных матриц, что и для случая краевых условий Дирихле–Неймана. В последующей, второй части настоящей работы будет построен многосеточный переобуславливатель для исходной матрицы жесткости A.

Кафедра математических методов и моделирования *Поступила 05.09.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kuznetsov Yu.A.** – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1989, v. 4, № 5, p. 351–379.
2. **Hakopian Yu.R. and Kuznetsov Yu.A.** – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1991, v. 6, № 6, p. 453–483.

3. **Axelsson O., Hakopian Yu.R. and Kuznetsov Yu.A.** – IMA J. Numer. Anal., 1997, v. 17, p. 125–149.
4. **Hakopian Yu.R. and Hovhannisyan H.A.** – Algebra, Geometry & their Applications (Seminar Proceedings. Yerevan State University). 2002, v. 2, p. 58–72.
5. **Hakopian Yu.R. and Hovhannisyan H.A.** – Computer Science and Information Technologies. Proceedings of CSIT'03 Conference, Yerevan, 2003, p. 327–330.

Ա. Բ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉ ԽԱՌԸ ՏԻՊԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ
I. ԵՐԿՑԱՆՑԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքը, որը բաղկացած է երկու մասից, նվիրված է ուղղանկյուն տիրույթում էլիպսական հավասարումների վերջավոր տարրային մոտարկման դեպքում առաջացող կոշտության մատրիցների համար հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցմանը: Եզրագծի մի մասի վրա դրված է Դիրիխլեի պայմանը, իսկ մյուսի վրա՝ երրորդ սեռի եզրային պայմանը: Աշխատանքի առաջին մասում շարադրված է երկցանցային վերապայմանավորիչների հաջորդականության կառուցումը, որը հիմք է հանդիսանում բազմացանցային վերապայմանավորիչի կառուցման համար:

A. B. GRIGORYAN

ALGEBRAIC MULTIGRID PRECONDITIONER FOR ELLIPTIC PROBLEMS WITH MIXED TYPE BOUNDARY CONDITIONS
I. TWO-GRID PRECONDITIONERS

Summary

The present paper, consisting of two parts, is devoted to constructing algebraic multigrid preconditioners for stiffness matrices arising in finite element approximation of elliptic problems in rectangular domain. The Dirichlet condition is placed on one part of the boundary and third type condition on the rest of the boundary. In the first part of the paper a sequence of two-grid preconditioners is described on the base of which the multigrid preconditioner will be constructed.